Capitolul 3
Performanţele sistemelor de reglare automată

Indicii de calitate ai unui sistem de reglare automată pot fi puşi în evidenţă pe baza răspunsului sistemului la semnale de tip treaptă, rampă sau sinusoidale.

3.1. Indici de calitate la variaţia treaptă a referinţei

Răspunsul unui sistem de reglare automată la variaţia treaptă a semnalului de referinţă poartă numele de răspuns indicial. Deoarece în multe situaţii sistemul de reglare este de ordinul I sau II, se vor defini principalii indici de calitate făcând referire la aceste sisteme.

3.1.1. Indici de calitate pentru sistemul de ordinul I

Considerăm un sistem de reglare automată de ordinul I, cu reacţie negativă unitară, având structura din Fig.3.1.

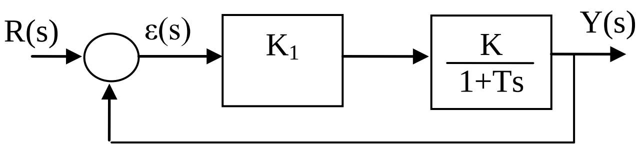

Fig.3.1.

Funcţia de transfer în buclă deschisă este:

$$H(s) = \frac{K_1 K}{1+Ts} \tag{3.1}$$

Calculând funcţia de transfer a sistemului închis, se obţine:

$$H_0(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{\dfrac{K_1 K}{1+Ts}}{1+\dfrac{K_1 K}{1+Ts}} = \frac{\dfrac{K_1 K}{1+K_1 K}}{1+\dfrac{T}{1+K_1 K}s}; \tag{3.2}$$

Notăm:

$$K_0 = \frac{K_1 K}{1 + K_1 K} \text{ factorul de amplificare} \tag{3.3}$$

$$T_0 = \frac{T}{1 + K_1 K} \text{ constanta de timp} \tag{3.4}$$

Rezultă:

$$H_0(s) = \frac{K_0}{1 + T_0 s} \tag{3.5}$$

Pentru sistemul închis se observă o micşorare a constantei de timp T de $(1+K_1K)$ ori şi o modificare a factorului de amplificare ce tinde către valoarea 1 atunci când produsul K_1K are o valoare foarte mare.
Răspunsul indicial al sistemului închis este de forma:

$$y(t) = K_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_0}}) \tag{3.6}$$

Valoarea de regim staţionar este:

$$y_{st} = \lim_{t \to \infty} y(t) = K_0 \tag{3.7}$$

Reprezentarea grafică a răspunsului indicial este dată în Fig.3.2.

Timpul de răspuns t_r se defineşte ca fiind timpul în care mărimea de ieşire a sistemului intră într-o bandă de dimensiuni ΔK_0 (Δ = 2% sau Δ = 5%) centrată pe valoarea de regim staţionar, K_0.
Astfel:

$$y(t_r) = K_0 (1 - e^{-\frac{t_r}{T_0}}) = K_0 - \Delta K_0 = (1 - \Delta) K_0 \tag{3.8}$$

Pentru Δ = 2% (0.02) se obţine $t_{r2\%} \cong 4T_0$, iar pentru Δ = 5% (0.05) se obţine $t_{r5\%} \cong 3T_0$.
Eroarea staţionară este:

$$\varepsilon_{st} = 1 - y_{st} = 1 - K_0 = \frac{1}{1 + K_1 K} \tag{3.9}$$

Se observă că eroarea staţionară este cu atât mai mică cu cât factorul de amplificare K_1 este mai mare (K este fix).
Timpul de creştere t_c este definit ca fiind timpul în care mărimea de ieşire ajunge la valoarea $0.9 y_{st} = 0.9 K_0$.

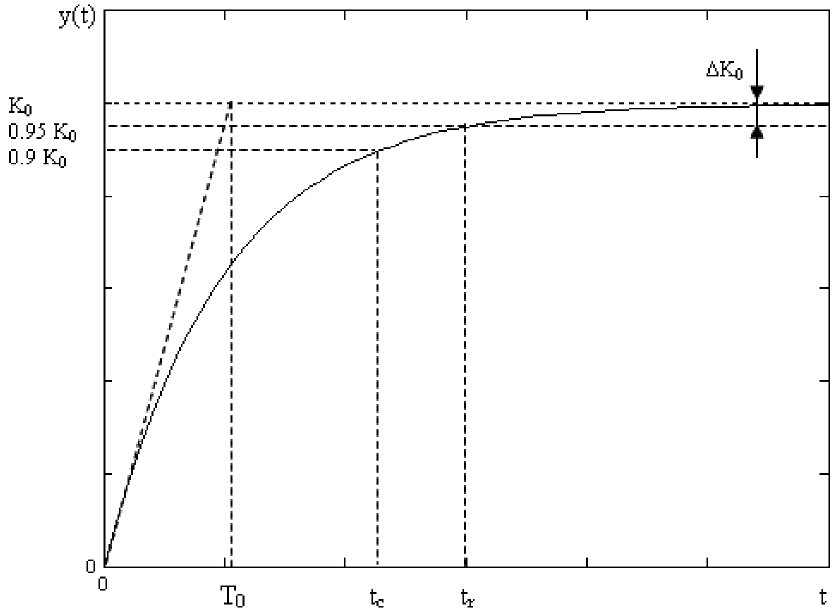

Fig.3.2.

Rezultă:

$$y(t_c) = K_0(1 - e^{-\frac{t_c}{T_0}}) = 0.9K_0$$

Se obţine pentru timpul de creştere valoarea:

$$t_c \cong 2.2T_0 \qquad (3.10)$$

3.1.2. Indici de calitate pentru sistemul de ordinul II

De multe ori, în cadrul aplicaţiilor practice, modelul matematic al unui sistem de reglare automată este de ordinul II.

Funcţia de transfer corespunzătoare unui astfel de sistem este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (3.11)$$

unde:

ω_n = pulsaţia naturală a sistemului

ξ = factorul de amortizare

Dacă mărimea de referinţă este o treaptă, $r(t) = r_0 1(t)$, având transformata Laplace $R(s) = r_0/s$, atunci valoarea de regim staţionar a mărimii de ieşire pentru acest sistem poate fi dedusă utilizând teorema valorii finale:

$$\begin{aligned} y_{st} &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sH(s)R(s) = \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\frac{r_0}{s} = Kr_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

De cele mai multe ori, mărimea de ieşire are aspectul din Fig.3.3.

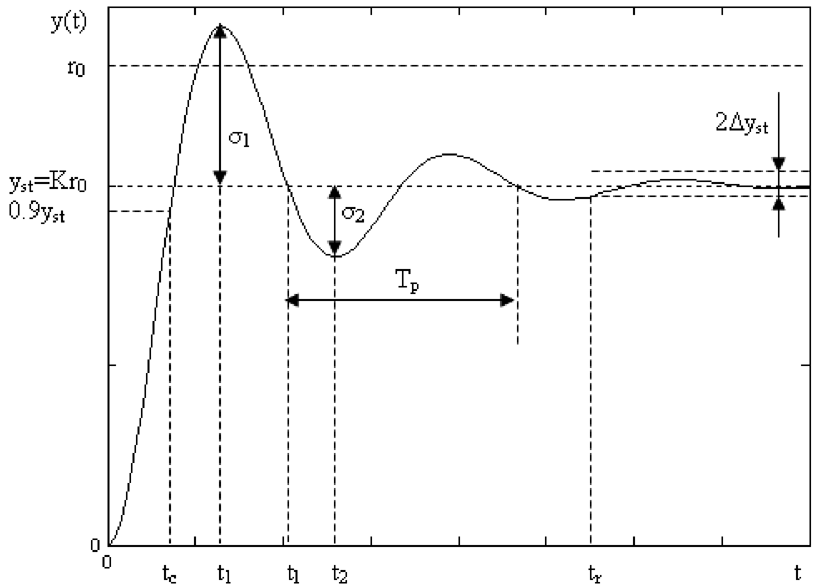

Fig.3.3.

Se pot defini următoarele mărimi:

- eroarea, $\varepsilon(t) = r(t) - y(t) = r_0 - y(t)$ (3.13)
- eroarea activă, $\sigma(t) = y(t) - y_{st}$ (3.14)

În regim staţionar, se pot defini:

- eroarea staţionară, $\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty}\big(r(t) - y(t)\big) = r_0 - y_{st}$ (3.15)
- eroarea staţionară relativă, procentuală,

$$\varepsilon_{st}\% = \frac{\varepsilon_{st}}{r_0}\cdot 100 = (1 - \frac{y_{st}}{r_0})\cdot 100\% \tag{3.16}$$

În regim dinamic, avem:

- eroarea activă maximă (depăşirea maximă)

  $\sigma_1 = \sigma_{max} = y_{max} - y_{st}$ (3.17)
- eroarea activă, relativă, maximă (suprareglarea)

  $\sigma\% = \frac{\sigma_1}{y_{st}} \cdot 100\%$ (3.18)
- timpul de răspuns t_r (durata regimului tranzitoriu) este intervalul de timp în care mărimea de ieşire intră într-o bandă Δy_{st} centrată pe y_{st}: $|y(t) - y_{st}| < \Delta y_{st}$ pentru $t > t_r$, unde Δ = 2% (=0.02) sau Δ = 5% (=0.05)
- timpul de creştere, t_c la $0.9y_{st}$
- timpul de liniştire, t_l, reprezintă timpul scurs de la aplicarea referinţei până când mărimea de ieşire devine egală cu y_{st}, după trecerea prin eroarea maximă.
- gradul de amortizare, $\delta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$
- perioada de oscilaţie proprie, T_p

Aceşti indici de calitate pot constitui obiective impuse în cadrul proiectării unui sistem de reglare automată.

Considerăm acum un sistem de ordinul II având funcţia de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (K=1) \tag{3.19}$$

Dacă se aplică o referinţă treaptă unitară, $r(t) = 1(t)$, răspunsul indicial al sistemului este:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi) \tag{3.20}$$

unde:

$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ este pulsaţia proprie de oscilaţie (3.21)

$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ este perioada proprie de oscilaţie (3.22)

Polii funcţiei de transfer sunt daţi de relaţia:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \tag{3.23}$$

pentru un sistem oscilant cu răspunsul indicial având forma prezentată în figură.
Momentele t_1, t_2 în care y(t) trece prin valorile maxime se obţin prin anularea derivatei:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \tag{3.24}$$

adică:

$$\frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t) = 0 \tag{3.25}$$

Rezultă:

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t_i = i\pi \;, \quad i = 1,2... \tag{3.26}$$

adică:

$$t_i = \frac{i\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad i = 1,2... \tag{3.27}$$

Valorile mărimii de ieşire corepunzătoare timpilor t_1 şi t_2 sunt:

$$y(t_1) = 1 + e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.28}$$

$$y(t_2) = 1 - e^{-\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.29}$$

Rezultă:

$$\sigma_1 = e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.30}$$

$$\sigma_2 = e^{-\xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.31}$$

Se constată că avem:

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 \tag{3.32}$$

Din aceste relaţii rezultă că suprareglarea σ% depinde numai de factorul de amortizare ξ, dependenţa fiind dată în Fig.3.4.

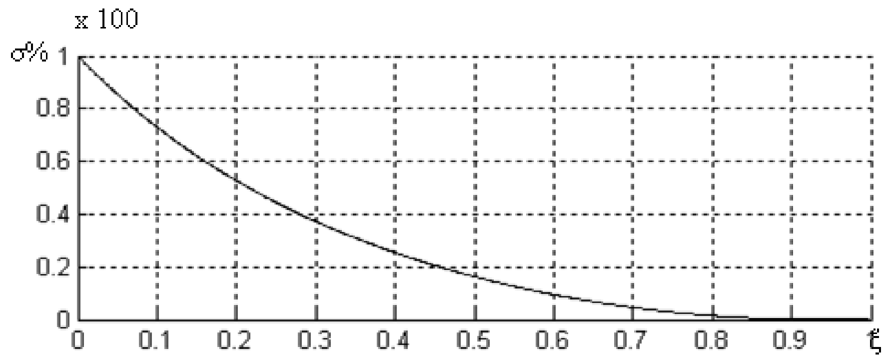

Fig.3.4.

Valorile admise în practică sunt:

$$0 < \sigma\% < 16\% \qquad 0.5 < \xi < 1 \tag{3.33}$$

Gradul de amortizare δ devine:

$$\delta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3.34}$$

Deoarece $\sigma_2 = \sigma_1^2$, atunci, pentru o suprareglare maximă de 16% (0.16), vom avea $\sigma_2 = 0.0256$, adică $\sigma_2 = 2.56\%$.

Această relaţie arată că răspunsul y(t) intră în banda de 5% înainte de apariţia amplitudinii σ_2, când regimul tranzitoriu este deja încheiat, timpul de răspuns t_r fiind mic.

Durata regimului tranzitoriu se determină din :

$$|\sigma(t_r)| \le \Delta y_{st}, \tag{3.35}$$

adică, în acest caz

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \le \Delta,\ (y_{st}) = 1, \tag{3.36}$$

deoarece $|\sin(\omega_p t + \varphi)| \le 1$.

Rezultă:

$$t_r = -\frac{\ln(\Delta\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} \tag{3.37}$$

Deoarece $\Delta\sqrt{1-\xi^2} < 1$, logaritmul este negativ, rezultând $t_r>0$.
Pentru valorile curente ale lui ξ, considerând Δ = 5% (0.05), pentru timpul de răspuns t_r se obţin valorile date în Tabelul 3-1,

Tabelul 3-1.

ξ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$t_r\omega_n$	6.28	5.36	4.76	4.38	4.25

deoarece $t_r\omega_n = -\dfrac{\ln(\Delta\sqrt{1-\xi^2})}{\xi}$.

Se observă că pentru valori uzuale ale ξ şi putem scrie că $t_r\omega_n \cong 4$ (acoperitor).
Performanţa care se impune sistemului cu privire la timpul de răspuns este de forma:

$$t_r \le t_{r\,impus} \tag{3.38}$$

3.2. Performanţele sistemelor de reglare automată la variaţia treaptă a perturbaţiei

Se consideră un sistem de reglare automată monovariabil, cu legătură inversă unitară şi aflat într-un regim staţionar, având mărimea de ieşire egală cu y_0.
Dacă r(t)=0 şi se aplică o treaptă la nivelul perturbaţiei, $v(t) = v_0 1(t)$, există două variaţii posibile ale mărimii de ieşire ca în Fig.3.5. şi Fig.3.6.

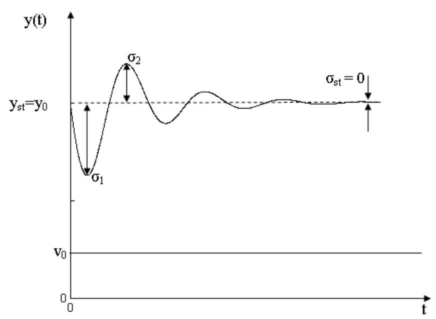

Fig.3.5.

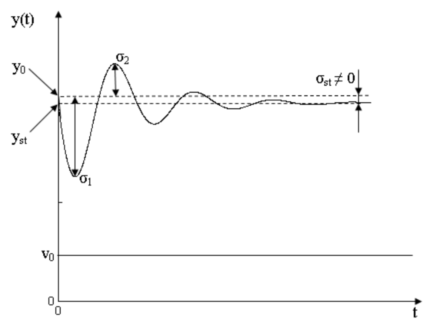

Fig.3.6.

Deoarece perturbaţia şi mărimea de ieşire sunt două mărimi de natură fizică diferită, se utilizează eroarea activă provocată de perturbaţie:

$$\sigma_{st} = y_{st} - y_0 \tag{3.39}$$

În situaţia prezentată în Fig.3.5 avem:

$$y_{st} = y_0,\ \sigma_{st} = 0,$$

iar în situaţia prezentată în Fig.3.6 avem:

$$y_{st} \neq y_0,\ \sigma_{st} \neq 0.$$

În cazul studierii regimului staţionar obţinut la variaţia perturbaţiei, deosebit de importantă este caracteristica statică y_{st}=f(v).

Considerăm caracteristica statică dată în Fig.3.7, liniară pe întreg domeniul de variaţie al perturbaţiei [0,v_{max}], numit domeniu de proporţionalitate al sistemului automat.

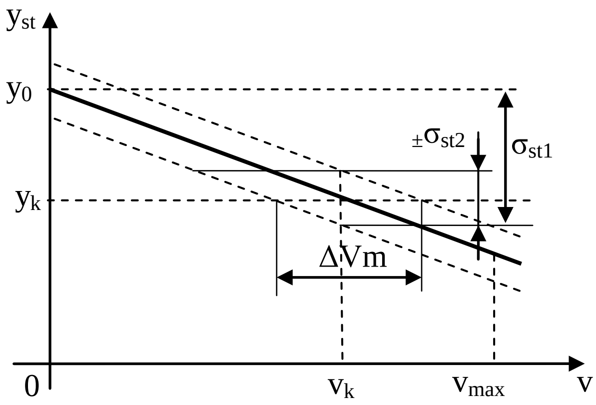

Fig.3.7.

În cazul sistemelor de reglare automată ideale, funcţionarea în regim staţionar are loc pe caracteristica ideală, trasată cu linie plină. Astfel, unei valori v_k a perturbaţiei îi corespunde o singură valoare y_k a mărimii de ieşire, eroarea staţionară fiind σ_{st1}.

În funcţie de eroarea activă staţionară determinată pe caracteristica ideală, se defineşte statismul sistemului:

$$S = \frac{\sigma_{st1}}{v_k} \tag{3.40}$$

Sistemele de reglare automată reale prezintă imperfecţiuni (frecări, jocuri, histeresis) care determină o zonă de insensibilitate de lăţime

constantă, centrată pe caracteristica ideală. Din această cauză, pentru o valoare v_k a perturbaţiei se introduce o eroare activă staţionară $\pm\sigma_{st\,2}$.
Unei valori y_k a mărimii de ieşire îi corespunde o mulţime de valori pentru perturbaţii, cuprinse în zona Δv_m, centrată pe valoarea v_k. Această zonă este numită zona moartă a perturbaţiei.
Ca urmare, eroarea activă staţionară ce determină calitatea sistemului de reglare automată este:

$$\sigma_{st} = \sigma_{st\,1} \pm \sigma_{st\,2} \qquad (3.41)$$

Micşorarea erorii active staţionare poate fi făcută prin acordarea regulatorului automat, caz în care se micşorează σ_{st1} şi prin folosirea unor elemente de calitate şi cu o execuţie îngrijită, când se micşorează $\sigma_{st\,2}$.
Sistemele de reglare automată la care valoarea erorii active staţionare nu depinde de perturbaţie (S = 0) se numesc astatice (Fig. a), iar cele la care eroarea activă staţionară depinde de perturbaţie (Fig. b) se numesc statice.
Pentru majoritatea sistemelor de reglare automată avem:

$$y_{st} < y_0,\;\; \sigma_{st} < 0,\;\; S < 0. \qquad (3.42)$$

Se întâlnesc şi sisteme de reglare automată la care S>0, numite sisteme cu statism invers.

3.3. Indici de performanţă puşi în evidenţă prin folosirea răspunsului la frecvenţă

Aceste performanţe ale sistemului de reglare automată pot fi definite pornind de la locul de transfer sau de la caracteristicile atenuare-frecvenţă şi fază-frecvenţă (diagrama Bode).

3.3.1. Indici de performanţă pentru sistemul deschis

Se consideră locul de transfer al sistemului deschis, în planul căruia este trasat cercul cu centrul în origine şi de rază unitară, ca în Fig.3.8.
Se pot defini următorii indici de calitate:

- *marginea de amplificare*:

$$m_A = \frac{1}{|H(j\omega_\pi)|} \tag{3.43}$$

pentru:

$$\arg H(j\omega_\pi) = -\pi \tag{3.44}$$

Marginea de amplificare astfel definită ne arată de câte ori putem creşte amplificarea la pulsaţia ω_π.

Pentru un sistem stabil, avem $|H(j\omega_\pi)| < 1$, rezultă $m_A > 1$.

Se poate defini marginea de amplificare în decibeli prin:

$$m_{A\,dB} = 20\lg(m_A) \tag{3.45}$$

Valori tipice pentru marginea de amplificare sunt:

$$m_A \geq 2\text{, deci } m_{A\,dB} \geq 6 \text{ [dB].} \tag{3.46}$$

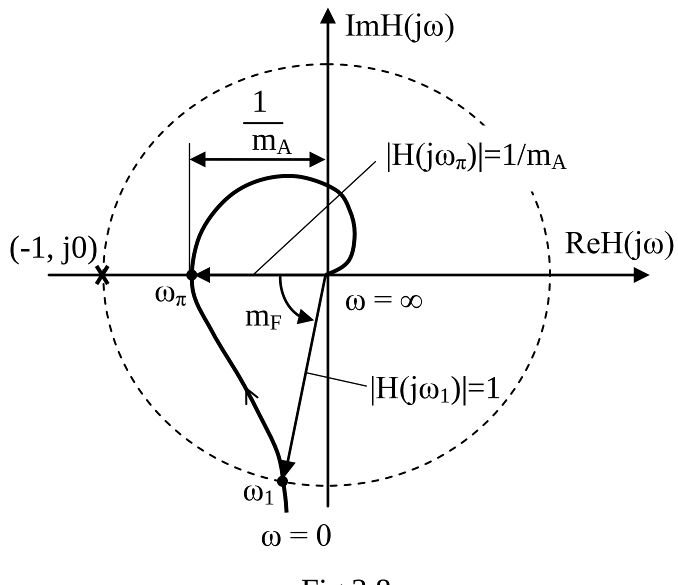

Fig.3.8.

- *marginea de fază*:

$$m_F = 180° + \arg H(j\omega_1) \tag{3.47}$$

pentru:

$$|H(j\omega_1)| = 1 \tag{3.48}$$

În aceste expresii ω_1 reprezintă pulsaţia pentru care locul de transfer intersectează cercul cu centrul în origine şi de rază 1. Valoarea modulului în acest caz este 1, adică $|H(j\omega_1)| = 1$ (de aici şi indicele 1 pentru ω).

Valoarea ω_π este pulsaţia pentru care locul de transfer intersectează semiaxa reală negativă, deci acolo unde faza este de -180° $\arg H(j\omega_\pi) = -\pi$ (de aici şi indicele π pentru ω).

Valori tipice pentru o margine de fază corespunzătoare sunt $m_F \in [30°, 60°]$.

Marginile de amplificare şi de fază pot fi evidenţiate şi pe diagramele Bode construite pentru sistemul deschis. În Fig.3.9 sunt prezentate caracteristicile Bode, fiind evidenţiate marginile de fază şi de amplificare pentru un sistem instabil.

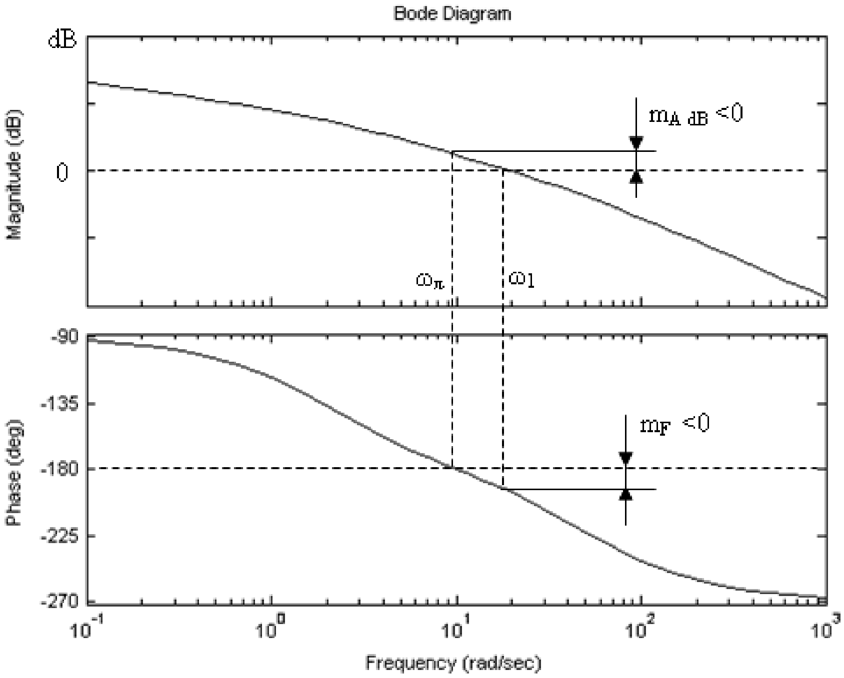

Fig.3.9.

3.3.2. Indici de performanţă pentru sistemul închis

Considerăm caracteristica atenuare-frecvenţă a sistemului închis dată în Fig.3.10.
Principalii indici de calitate puşi în evidenţă pe această caracteristică sunt:

- *banda de trecere* a sistemului, ω_B.

Această valoare este pulsaţia în care $\left|H_0(j\omega)\right|_{dB}$ scade până la valoarea 0.707 $H_0(0)$, unde $H_0(0)$ este atenuarea corespunzătoare pulsaţiei nule.

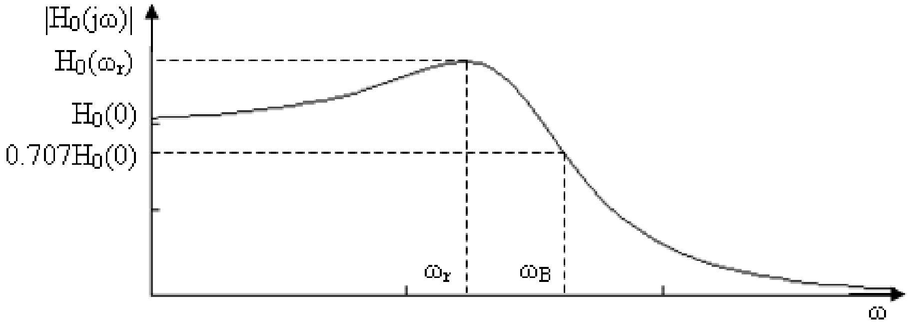

Fig.3.10.

Avem:

$$\left|H_0(j\omega_B)\right|_{dB} = 20\lg\frac{H_0(0)}{\sqrt{2}} = 20\lg H_0(0) - 3 \ [dB] \qquad (3.49)$$

deoarece:

$$20\lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -3[dB]. \qquad (3.50)$$

Performanţa impusă sistemului de reglare legată de banda de trecere este:

$$\omega_B \geq \omega_{B\,impus} \qquad (3.51)$$

- *factorul de rezonanţă*

Acesta se defineşte prin relaţia:

$$Q = \frac{\left|H_0(j\omega_r)\right|}{H_0(0)} \qquad (3.52)$$

Dacă se are în vedere un sistem de ordinul II cu funcţia de transfer:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (3.53)$$

atunci:

$$H_0(\omega)=\left|H_0(j\omega)\right|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2\omega_n^2}} \quad (3.54)$$

Valoarea maximă se obţine pentru pulsaţia ω_r pentru care avem:

$$\frac{dH_0(\omega)}{d\omega}=0 \quad (3.55)$$

Rezultă:

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad (3.56)$$

unde ω_r este pulsaţia de rezonanţă.

Banda de trecere pentru acest sistem se obţine din relaţia:

$$H_0(\omega_B)=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_B^2)^2+4\xi^2\omega_B^2\omega_n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.57)$$

Rezultă de aici că factorul de rezonanţă este:

$$Q=\frac{\left|H_0(j\omega_r)\right|}{H_0(0)}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} \quad (3.58)$$

relaţie care se obţine prin înlocuirea lui ω cu ω_r în relaţia lui $|H(j\omega)|$.

Factorul de rezonanţă depinde deci numai de factorul de amortizare ξ. Banda de trecere ω_B calculată cu relaţia anterioară depinde atât de factorul de amortizare ξ cât şi de pulsaţi a naturală a sistemului ω_n, ca în Tabelul 3-2:

Tabelul 3-2.

ξ	0.5	0.6	0.7	0.8
ω_B	$1.27\omega_n$	$1.15\ \omega_n$	$\approx\omega_n$	$0.76\ \omega_n$

Se consideră un sistem de ordinul I având funcţia de transfer:

$$H_0(s)=\frac{K_0}{1+T_0 s} \quad (3.59)$$

Răspunsul la frecvenţă este:

$$H_0(j\omega)=\frac{K_0}{1+j\omega T_0} \quad (3.60)$$

$$\left|H_0(j\omega)\right|=\frac{K_0}{\sqrt{1+\omega^2T_0^2}} \quad (3.61)$$

Banda de trecere se deduce din:

$$|H_0(j\omega_B)| = \frac{K_0}{\sqrt{1+\omega_B^2 T_0^2}} = \frac{H_0(0)}{\sqrt{2}} = \frac{K_0}{\sqrt{2}} \tag{3.62}$$

Rezultă:

$$\omega_B = \frac{1}{T_0} \tag{3.63}$$

Pentru un sistem de ordinul I, valoarea maximă a atenuării este $H_0(0)$, deci nu se poate vorbi de un factor de rezonanţă Q.
Pentru un sistem de ordinul I, caracteristica atenuare-frecvenţă este dată în Fig.3.11.

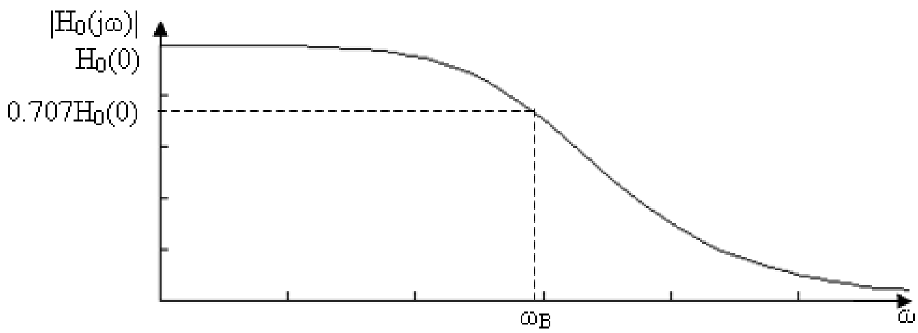

Fig.3.11.

3.4. Precizia sistemelor de reglare automată

Considerăm un sistem de reglare automată cu legătură inversă unitară, ca în Fig.3.12.

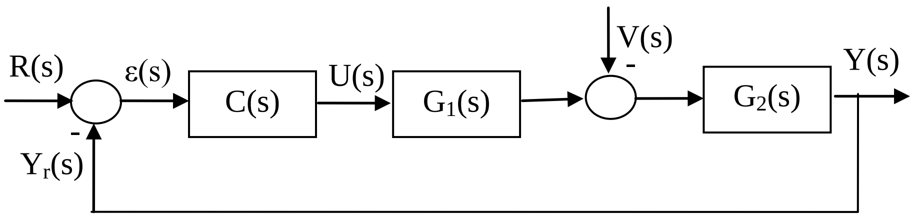

Fig.3.12.

Vom aplica principiul superpoziţiei, considerând Y(s) ca depinzând mai întâi de R(s) (pentru V(s)=0) şi apoi de V(s) (pentru R(s)=0).
Rezultă:

$$Y_R(s) = \frac{C(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} R(s) \quad (3.64)$$

$$Y_V(s) = -\frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} V(s) \quad (3.65)$$

Notăm:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (3.66)$$

$$H(s) = C(s)G(s) \quad (3,67)$$

Rezultă:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_V(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + H(s)} V(s) \quad (3.68)$$

Eroarea este:

$$\varepsilon(s) = R(s) - Y(s) \quad (3.69)$$

adică:

$$\varepsilon(s) = R(s) - \frac{H(s)}{1 + H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + H(s)} V(s) \quad (3.70)$$

Rezultă:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + H(s)} V(s) \quad (3.71)$$

Notăm:

$$H_{\varepsilon R}(s) = \frac{1}{1 + H(s)} \quad (3.72)$$ funcţia de transfer a erorii în raport cu referinţa

$$H_{\varepsilon V}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + H(s)} \quad (3.73)$$ funcţia de transfer a erorii în raport cu perturbaţia

Rezultă:

$$\varepsilon(s) = H_{\varepsilon R}(s)R(s) + H_{\varepsilon V}(s)V(s) \quad (3.74)$$

3.4.1. Precizia sistemelor de reglare automată în raport cu referinţa

Considerăm că referinţa aplicată sistemului este un semnal de tip treaptă, rampă sau parabolă. Pentru aceste semnale, transformatele Laplace corespunzătoare sunt:

- $R(s) = \frac{1}{s}$ pentru r(t) = 1(t)
- $R(s) = \frac{1}{s^2}$ pentru r(t) = t
- $R(s) = \frac{2}{s^3}$ pentru r(t) = t^2

Putem scrie în general:

$R(s) = \frac{1}{s^\alpha}$, cu

- $\alpha = 1$, pentru r(t) = 1(t)
- $\alpha = 2$, pentru r(t) = t
- $\alpha = 3$, pentru r(t) = t^2

Considerăm că sistemul este asimptotic stabil, adică toţi polii funcţiei de transfer a sistemului închis se găsesc în semiplanul stâng al planului complex.

Pentru funcţia de transfer a sistemului deschis considerăm o scriere de forma $H(s) = \frac{H^*(s)}{s^\gamma}$, unde $H^*(s)$ reprezintă acea parte din funcţia de transfer H(s) care rămâne după separarea polilor în origine prin termenul s^γ.

Numărul de poli în origine este γ, iar $H_0^*(0) \neq 0$ ($H^*(s)$ nu mai are alţi poli în origine).

Se spune că un sistem de reglare automată este precis în raport cu referinţa dacă:

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{3.75}$$

Aplicând teorema valorii finale, putem scrie:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon R}(s)R(s) \tag{3.76}$$

Rezultă:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{H^*(s)}{s^\gamma}}\frac{1}{s^\alpha} = \lim_{s\to 0}\frac{s^{\gamma+1-\alpha}}{s^\gamma + H^*(s)} \tag{3.77}$$

unde $\alpha \in \{1, 2, 3, ...\}$; $\gamma \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$

1. *Pentru semnalul treaptă*, α=1:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{\gamma}}{s^{\gamma} + H^{*}(s)}, \tag{3.78}$$

Rezultă:

- $$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1+H^{*}(0)} = \frac{1}{1+k_p} \text{ pentru } \gamma = 0 \tag{3.79}$$
- $\varepsilon_{st} = 0$ pentru $\gamma \geq 1$

Reprezentarea grafică a acestor două situaţii este dată în Fig.3.13 ($\alpha = 1$, $\gamma = 0$)şi Fig.3.14 ($\alpha = 1, \gamma \geq 1$).

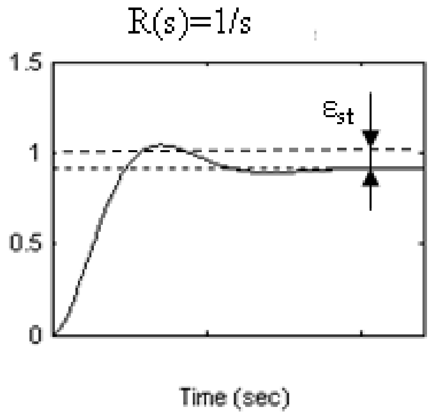

Fig.3.13.

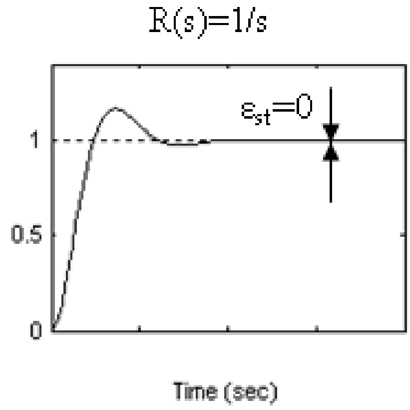

Fig.3.14.

2. *Pentru semnalul rampă unitară*, α=2:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{\gamma-1}}{s^{\gamma} + H^{*}(s)} \tag{3.80}$$

Rezultă:

- $\varepsilon_{st} = \infty$, pentru $\gamma = 0$
- $$\varepsilon_{st} = \frac{1}{H^{*}(0)} = \frac{1}{k_v}, \text{ pentru } \gamma = 1. \tag{3.81}$$
- $\varepsilon_{st} = 0$, pentru $\gamma \geq 2$,

unde $k_v = \lim_{s\to 0} sH(s) = H^{*}(0)$, (3.82)

este coeficientul erorii de viteză.

Reprezentarea grafică a acestor situaţii este dată în Fig.3.15($\alpha = 2$, $\gamma = 0$), Fig.3.16 ($\alpha = 2$, $\gamma = 1$) şi Fig.3.17 ($\alpha = 2$, $\gamma \geq 2$)

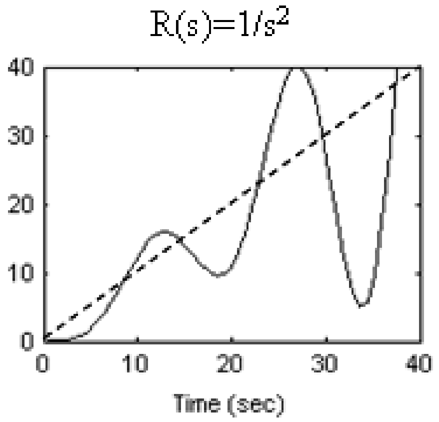

Fig.3.15.

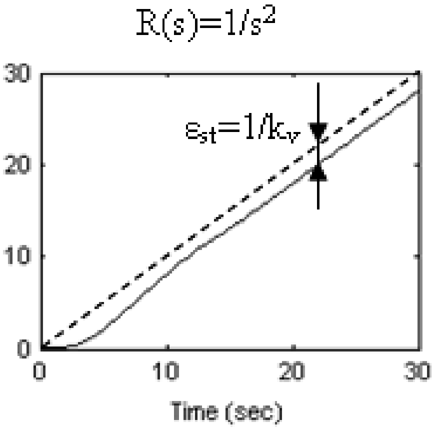

Fig.3.16.

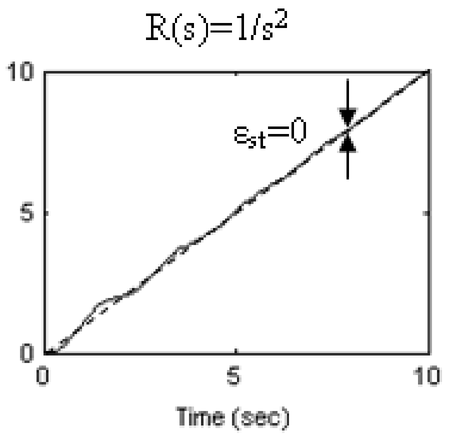

Fig.3.17.

3. *Pentru o referinţă tip parabolă*, α=3:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^{\gamma-2}}{s^{\gamma} + H^{*}(s)} \tag{3.83}$$

Rezultă:

- $\varepsilon_{st} = \infty$, pentru $\gamma = 0,\ 1$

- $\varepsilon_{st} = \dfrac{1}{H^*(0)} = \dfrac{1}{k_a}$, pentru $\gamma = 2$ (3.84)
- $\varepsilon_{st} = 0$, pentru $\gamma \geq 3$

unde $k_a = \lim\limits_{s \to 0} s^2 H(s) = H^*(0)$, (3.85)

este coeficientul erorii de acceleraţie.
Reprezentarea grafică este dată în Fig.3.18(α = 3, γ = 0,1),Fig.3.19 (α = 3, γ = 2) şi Fig.3.20 (α = 3, γ ≥ 3)

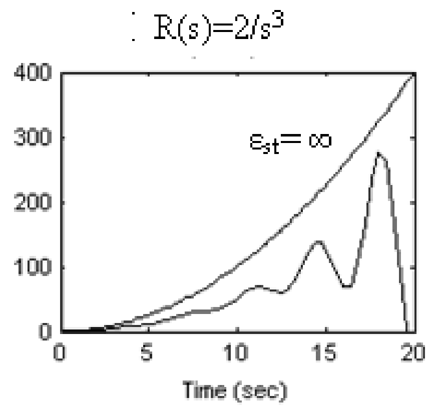

Fig.3.18.

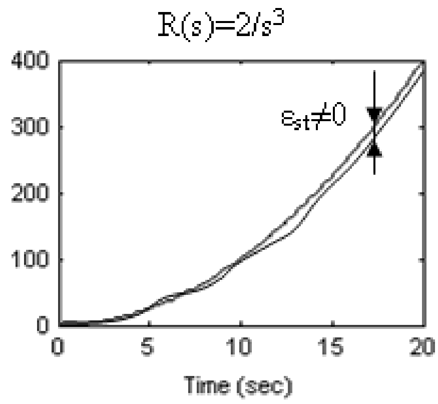

Fig.3.19.

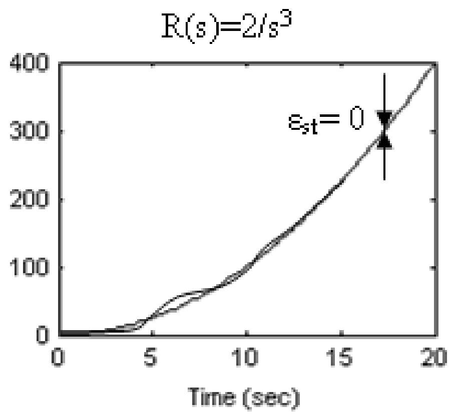

Fig.3.20.

Situaţiile prezentate sunt date sintetic în Tabelul 3-3:

Tabelul 3-3.

Referinţa		1(t), (α=1)	t, (α=2)	t^2, (α=3)
R(s)		$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{2}{s^3}$
Numărul de poli în origine al lui H(s), γ	0	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
	1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
	2	0	0	$\frac{1}{k_a}$
	≥3	0	0	0

În consecinţă, rezultă că precizia sistemului de reglare automată creşte odată cu ordinul polului în origine pentru funcţia de transfer a sistemului dechis.

Dar, pentru $\gamma \geq 2$, sistemul deschis devine instabil, iar stabilizarea sistemului închis devine dificilă.

Atunci când eroarea este finită, valoarea sa depinde de factorul de amplificare al sistemului deschis şi scade cu creşterea acestuia.

Micşorarea erorii staţionare prin creşterea factorului de amplificare trebuie făcută cu grijă deoarece mărirea acestuia duce la micşorarea rezervei de stabilitate a sistemului.

Concluzii: Un sistem de reglare automată este precis în raport cu referinţa (treaptă, rampă, parabolă, ...) dacă eroarea staţionară calculată în raport cu aceasta este nulă.

Reluăm expresia erorii staţionare pentru referinţa $R(s) = \frac{1}{s^\alpha}$:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \to 0} \frac{s^{\gamma+1-\alpha}}{s^\gamma + H^*(s)} \tag{3.86}$$

Pentru ca această eroare să fie nulă, este necesar ca $\gamma + 1 - \alpha \geq 1$, adică $\gamma \geq \alpha$, unde γ reprezintă ordinul de multiplicitate pentru polul în origine al funcţiei de transfer a sistemului deschis.

Acest lucru este evident pentru un sistem de reglare automată, analizând tabelul care sintetizează nivelul erorii în raport cu γ şi α.

Pentru o referinţă $R(s)=\dfrac{1}{s^{\alpha}}$, sistemul de reglare automată este precis dacă funcţia de transfer a sistemului deschis are în origine un pol de ordin $\gamma \geq \alpha$, are o eroare staţionară finită dacă $\gamma=\alpha-1$ şi o eroare staţionară infinită dacă $\gamma<\alpha-1$.

Privind expresia funcţiei de transfer a sistemului deschis, se poate preciza imediat, în funcţie de tipul referinţei şi de ordinul polului în origine, nivelul erorii staţionare (zero, finită, infinită).

3.4.2. Precizia sistemelor de reglare automată în raport cu perturbaţia

Pentru sistemul de reglare automată prezentat în Fig.3.12, avem:

$$Y_V(s)=\frac{G_2(s)}{1+H(s)}V(s)=H_{\varepsilon V}(s)V(s) \tag{3.87}$$

Considerăm acum R(s)=0.

Perturbaţia o vom considera de tip treaptă, rampă sau parabolă, având transformata Laplace:

$$V(s)=\frac{1}{s^{\alpha}},\quad \alpha=1,2,3...$$

Valoarea de regim staţionar a componentei mărimii de ieşire în raport cu perturbaţia se determină pe baza teoremei valorii finale:

$$\begin{aligned} y_{V_{st}} &= \lim_{t\to\infty} y_V(t)=\lim_{s\to 0} sY_V(s)=\lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon V}(s)V(s)= \\ &=\lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon V}(s)\frac{1}{s^{\alpha}}=\lim_{s\to 0} s^{1-\alpha}H_{\varepsilon V}(s) \end{aligned} \tag{3.88}$$

Dacă sistemul considerat este strict stabil, având toţi polii funcţiei de transfer $H_{\varepsilon V}(s)$ în semiplanul stâng al planului complex, atunci condiţia ca $y_{V_{st}}$ să fie nulă este:

$$\lim_{s\to 0} s^{1-\alpha}H_{\varepsilon V}(s)=0 \tag{3.89}$$

Dacă funcţia de transfer $H_{\varepsilon V}(s)$ conţine, în origine, un zerou având ordinul de multiplicitate γ, atunci avem $H_{\varepsilon V}(s)=s^{\gamma}H^{*}_{\varepsilon V}(s)$, unde $H^{*}_{\varepsilon V}(0)\neq 0$.

Condiţia anterioară devine:

$$y_{V\,st} = \lim_{s\to 0} s^{1-\alpha} s^{\gamma} H_{\varepsilon V}(s) = s^{\gamma-\alpha+1} H_{\varepsilon V}(s) \qquad (3.90)$$

Pentru $y_{V\,st} = 0$, rezultă $\gamma - \alpha + 1 \ge 1$, adică $\gamma \ge \alpha$.

Rezultă că $H_{\varepsilon V}(s)$ trebuie să aibă în origine un zerou având ordinul de multiplicitate $\gamma \ge \alpha$.

Dar:

$$H_{\varepsilon V}(s) = \frac{G_2(s)}{1+H(s)} = \frac{G_2(s)}{1+C(s)G(s)} \qquad (3.91)$$

Deoarece $G_2(s)$ şi $G(s)$ sunt fixate, rezultă că zeroul căutat pentru $H_{\varepsilon V}(s)$ nu poate să provină decât de la produsul $C(s)G(s)$, acesta trebuind să aibă un pol în origine de ordin de multiplicitate γ, adică:

$$C(s)G(s) = \frac{C^*(s)G^*(s)}{s^{\gamma}}, \text{ având } C^*(0)G^*(0) \ne 0 \qquad (3.92)$$

Rezultă:

$$H_{\varepsilon V}(s) = \frac{G_2(s)}{1+\dfrac{C^*(s)G^*(s)}{s^{\gamma}}} = \frac{s^{\gamma}G_2(s)}{s^{\gamma}+C^*(s)G^*(s)} \qquad (3.93)$$

Deoarece polul în origine considerat este pol pentru funcţia de transfer a căii directe H(s), rezultă că avem două situaţii:

- În cazul în care partea fixată are un pol în origine prin componenta $G_1(s)$, atunci controlerul C(s) trebuie să conţină în origine un pol cu ordinul de multiplicitate egal cu diferenţa dintre γ şi ordinul polului în origine al lui $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{G_1^*(s)}{s^{\beta}}, \quad G_1^*(0) \ne 0, \qquad (3.94)$$

$$C(s) = \frac{C^*(s)}{s^{\gamma-\beta}}, \quad C^*(0) \ne 0. \qquad (3.95)$$

Rezultă:

$$H_{\varepsilon V}(s) = \frac{G_2(s)}{1+\dfrac{C^*(s)G_1^*(s)G_2^*(s)}{s^{\gamma}}} = \frac{s^{\gamma}G_2(s)}{s^{\gamma}+C^*(s)G_1^*(s)G_2^*(s)} \qquad (3.96)$$

- Dacă în schimb, partea fixată are în funcţia de transfer un pol dat de componenta $G_2(s)$, atunci compensatorul C(s) este cel care trebuie să introducă polul cu ordinul de multiplicitate γ:

$$G_2(s) = \frac{G_2^*(s)}{s^\beta} \quad G_2^*(0) \neq 0 . \tag{3.97}$$

Rezultă:

$$H_{\varepsilon V}(s) = \frac{\dfrac{G_2^*(s)}{s^\beta}}{1 + \dfrac{C^*(s)}{s^\gamma} G_1^*(s) \dfrac{G_2^*(s)}{s\beta}} = \frac{s^\gamma G_2(s)}{s^{\beta+\gamma} + C^*(s) G_1^*(s) G_2^*(s)} \tag{3.98}$$

Exemplul 2-1.

Considerăm sistemul de reglare automată având schema bloc dată în Fig.3.21.

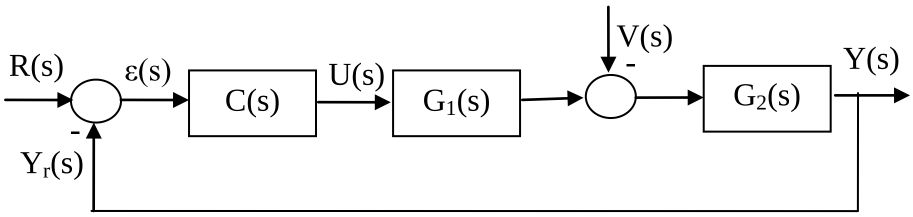

Fig.3.21.

Considerăm funcţia de transfer ale părţii fixate dată prin:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{1}{s(1+3s)} \;; \tag{3.99}$$

Pentru controler, considerăm funcţia de transfer de forma:

$$C(s) = \frac{1+5s}{s} \tag{3.100}$$

Vom considera următoarele două situaţii:

a) $G_1(s) = \dfrac{1}{1+3s}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{s}$

Rezultă:

$$H_{\varepsilon V}(s)=\frac{G_2(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1+5s}{s^2(1+3s)}}=$$
$$=\frac{1}{s}\frac{s^2(1+3s)}{s^2(1+3s)+(1+5s)} \quad (3.101)$$

- Pentru vatiaţia treaptă a perturbaţiei, $V(s)=\frac{1}{s}$, avem:

$$y_{V\,st}=\lim_{s\to 0}sH_{\varepsilon V}(s)V(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\frac{s^2(1+3s)}{s^2(1+3s)+(1+5s)}\frac{1}{s}=0 \quad (3.102)$$

- Pentru variaţia rampă a perturbaţiei, $V(s)=\frac{1}{s^2}$, avem:

$$y_{V\,st}=\lim_{s\to 0}sH_{\varepsilon V}(s)V(s)=$$
$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\frac{s^2(1+3s)}{s^2(1+3s)+(1+5s)}\frac{1}{s^2}=1\neq 0 \quad (3.103)$$

b) $G_1(s)=\frac{1}{s}$ $G_2(s)=\frac{1}{1+3s}$

Rezultă:

$$H_{\varepsilon V}(s)=\frac{G_2(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{1}{1+3s}\frac{1}{1+\frac{1+5s}{s^2(1+3s)}}=$$
$$=\frac{1}{1+3s}\frac{s^2(1+3s)}{s^2(1+3s)+(1+5s)}=\frac{s^2}{s^2(1+3s)+(1+5s)} \quad (3.104)$$

- Pentru variaţia treaptă a perturbaţiei, $V(s)=\frac{1}{s}$, avem:

$$y_{V\,st}=\lim_{s\to 0}sH_{\varepsilon V}(s)V(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s^2}{s^2(1+3s)+(1+5s)}\frac{1}{s}=0 \quad (3.105)$$

- Pentru variaţia rampă a perturbaţiei, $V(s)=\frac{1}{s^2}$, avem:

$$y_{V\,st}=\lim_{s\to 0}sH_{\varepsilon V}(s)V(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s^2}{s^2(1+3s)+(1+5s)}\frac{1}{s^2}=0 \quad (3.106)$$

Concluzie: În situaţia (a) compensatorul C(s) şi $G_1(s)$ au împreună un singur pol în origine, rezultând $y_{V_{st}} = 0$ numai pentru semnalul treaptă unitară iar $y_{V_{st}} = 1$ pentru semnalul rampă unitară.
În situaţia (b), compensatorul C(s) şi $G_1(s)$ au împreună, în origine, un pol de ordinul II, în această situaţie avem $y_{V_{st}} = 0$, atât pentru o variaţie treaptă, cât şi pentru o variaţie rampă a perturbaţiei V(s).
Rezultă că un sistem de reglare automată este precis în raport cu perturbaţia pentru $V(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}$ dacă funcţia de transfer a căii directe are, până în punctul în care intră perturbaţia, un pol în origine de ordinul $\gamma \geq \alpha$.

Exemplul 2-2.
Considerăm sistemul de reglare automată având structura din Fig.3.22.

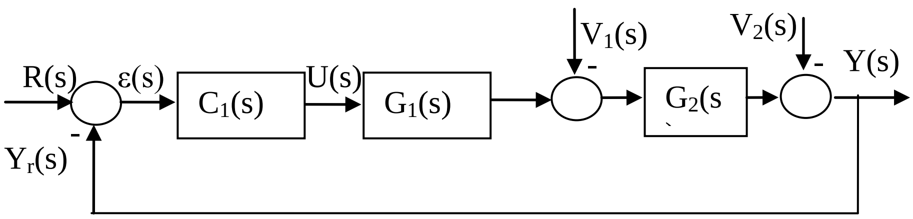

Fig.3.22.

Partea fixată are funcţiile de transfer:

$$G_1(s) = \frac{k_1}{1+Ts} \quad G_2(s) = \frac{k_2}{s}$$

Să se aprecieze precizia sistemului în raport cu referinţa şi perturbaţiile pentru semnale de tip treaptă sau rampă în situaţiile:

a) $C(s) = k_c$

b) $C(s) = k_c + \frac{1}{sT_i}$

Funcţia de transfer a căii directe este:

$$H(s) = C(s)G_1(s)G_2(s) \qquad (3.107)$$

a) $$H(s) = k_c \frac{k_1}{1+Ts}\frac{k_2}{s} \qquad (3.108)$$

Deoarece H(s) are în origine un pol simplu, rezultă că sistemul este precis pentru o referinţă treaptă şi are o eroare staţionară finită la un semnal rampă.
Avem $y_{V1st} = \text{constant} \neq 0$ pentru o treaptă $v_1(t)$ deoarece nu avem un integrator pe calea directă a sistemului până la intrarea perturbaţiei $V_1(s)$.
Avem $y_{V2st} = 0$ penru o treaptă $v_2(t)=1(t)$ deoarece există un integrator pe calea directă până la intrarea perturbaţiei $V_2(s)$.

b) $$H(s) = \frac{1+k_c T_i s}{sT_i} \frac{k_1}{1+Ts} \frac{k_2}{s} \tag{3.109}$$

H(s) are pe calea directă un pol dublu în origine. Rezultă că sistemul este precis la referinţe treaptă şi rampă şi are o eroare staţionară finită la o referinţă tip parabolă.
Deoarece avem un singur pol în origine până la intrarea perturbaţiei $V_1(s)$ în sistem, rezultă că sistemul este precis la o variaţie treaptă a perturbaţiei $V_1(s)$, are o eroare staţionară finită la o variaţie rampă şi infinită la o variaţie tip parabolă a perturbaţiei.
Deoarece avem doi poli în origine până la intrarea perturbaţiei $V_2(s)$ în sistem, rezultă că sistemul este precis în raport cu $V_2(s)$ la o variaţie treaptă şi rampă şi are o eroare staţionară finită la o variaţie tip parabolă.Valorile efective pentru aceste mărimi pot fi determinate cu uşurinţă.