

Capitolul 8

Sisteme numerice de reglare automată

8.1. Introducere

Până în acest punct, sistemele de reglare automată au fost sisteme dinamice continue, descrise pe baza funcțiilor de transfer continue. Aceste funcții de transfer au fost determinate prin aplicarea transformatei Laplace, în condiții inițiale nule, ecuației diferențiale ce descrie relația intrare-ieșire a sistemului.

Spre deosebire de sistemele de reglare continue, noțiunea de sistem numeric de reglare presupune utilizarea unui calculator numeric și a convertoarelor analog-numeric (CAN) cât și numeric-analogice (CNA), așa cum este prezentat în Fig.8.1.

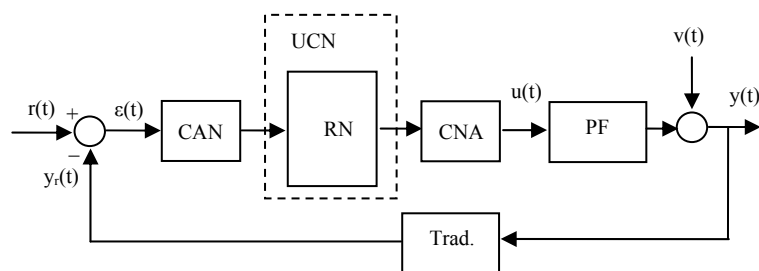


Fig.8.1.

În acest caz, semnalul de eroare (sau cel de măsură, după caz) este preluat prin intermediul unui CAN, legea de reglare este realizată numeric de către unitatea de calcul iar semnalul de comandă este trimis către proces prin intermediul unui CNA.

În situația prezentată în Fig.8.1 semnalul de eroare este obținut sub formă analogică prin efectuarea diferenței dintre semnalul de referință și cel de măsură. Acest semnal de eroare este convertit apoi într-o succesiune de valori numerice de către CAN. Semnalul de comandă $u(t)$ se obține prin transformarea de către CNA a valorii numerice de comandă obținută de

către unitatea de calcul numeric UCN. Perturbația $v(t)$ acționează aditiv, la ieșirea sistemului.

Există și posibilitatea ca semnalul de eroare să se obțină direct sub formă numerică. Acest lucru se întâmplă, de obicei, atunci când mărimea de referință se introduce direct de la tastatura (ecranul) sistemului numeric de calcul, fiind necesară doar conversia semnalului de măsură (reacție) $y_r(t)$, provenit de la traductor. Dacă referința este sub formă analogică, aceasta poate fi convertită separat într-o valoare numerică, semnalul de eroare fiind tot sub formă numerică, așa cum este prezentat în Fig.8.2.

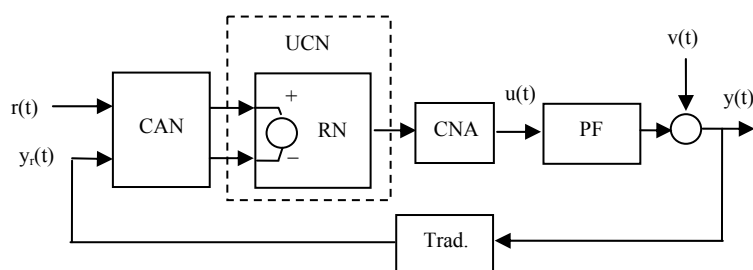


Fig.8.2.

Există două modalități prin care o unitate de calcul numeric poate conduce un proces tehnic (continuu).

O primă variantă este aceea în care toată analiza sistemului și sinteza corectorului (regulatorului) se face prin metodele prezentate în capitolele anterioare (pentru procesele continue) iar apoi corectorul (regulatorul) continuu determinat este trecut într-o reprezentare numerică pentru a putea fi pus în practică utilizând un sistem de calcul numeric. Important de menționat în acest caz că modelul sistemului (al părții fixate) este unul continuu și nu depinde de perioada de eșantionare. Este ca și cum am avea de a face cu un sistem de reglare continuu numai că partea de regulator nu este realizată fizic (utilizând amplificatoare operaționale) așa cum s-a văzut în capitolele anterioare ci este înlocuită cu un sistem de calcul care va face exact același lucru dar după reguli complet diferite. Regulatorul fizic discret (obținut prin discretizarea regulatorului continuu) depinde de perioada de eșantionare aleasă pentru intervenția sistemului numeric de calcul. Dacă se modifică perioada de eșantionare se reevaluează regulatorul discret corespunzător regulatorului continuu

determinat la început. În această situație vom vorbi despre conducerea (reglarea) unui proces continuu utilizând un sistem numeric de calcul.

A doua variantă se referă la trecerea procesului continuu sub forma unui proces discret, aplicate metodele specifice sistemelor discrete în ceea ce privește analiza sistemului și determinarea structurii corectorului (regulatorului) și apoi implementarea corectorului sau regulatorului numeric astfel determinat în sistemul de calcul numeric utilizat. De menționat aici că modelul discret al sistemului continuu (al părții fixate) depinde de valoarea perioadei de eșantionare considerată. Modificarea perioadei de eșantionare în timpul funcționării sistemului de reglare presupune reluarea calculului modelului discret și a regulatorului determinat pentru conducerea procesului. În această situație avem de a face cu un sistem numeric de reglare automată.

De precizat faptul că toate aceste conversii (A/N și N/A) se fac la momente bine precizate de timp, cu o frecvență dată de sistemul de calcul, numită frecvență de eșantionare. Intervalul dintre două momente consecutive în care se face intervenția sistemului de calcul numeric și a convertoarelor este numit perioadă de eșantionare și se notează cu T .

Dacă sistemul numeric de reglare presupune preluarea, de la sistemul continuu, a mai multor semnale sub formă analogică, semnale de care depinde elaborarea mărimii de comandă, atunci aceste semnale vor fi preluate prin multiplexarea semnalelor analogice și conversia succesivă a acestora în valori numerice la nivelul aceluiași CAN. Este evident că aceste prelevări de semnal se vor face cu o întârziere egală cu timpul de conversie al CAN.

Diferența dintre aceste două modalități distincte în care un sistem de calcul poate fi utilizat pentru conducerea unui proces tehnic poate fi înțeleasă dacă se urmărește Fig.8.3.

Astfel, în Fig.8.3(a) avem comportarea sistemului de reglare continuu, având pe calea directă un regulator analogic, în Fig.8.3(b) avem un sistem de reglare continuu pilotat de un sistem numeric de calcul (regulatorul analogic este realizat numeric) iar în fig.8.3(c) avem un sistem numeric de reglare.

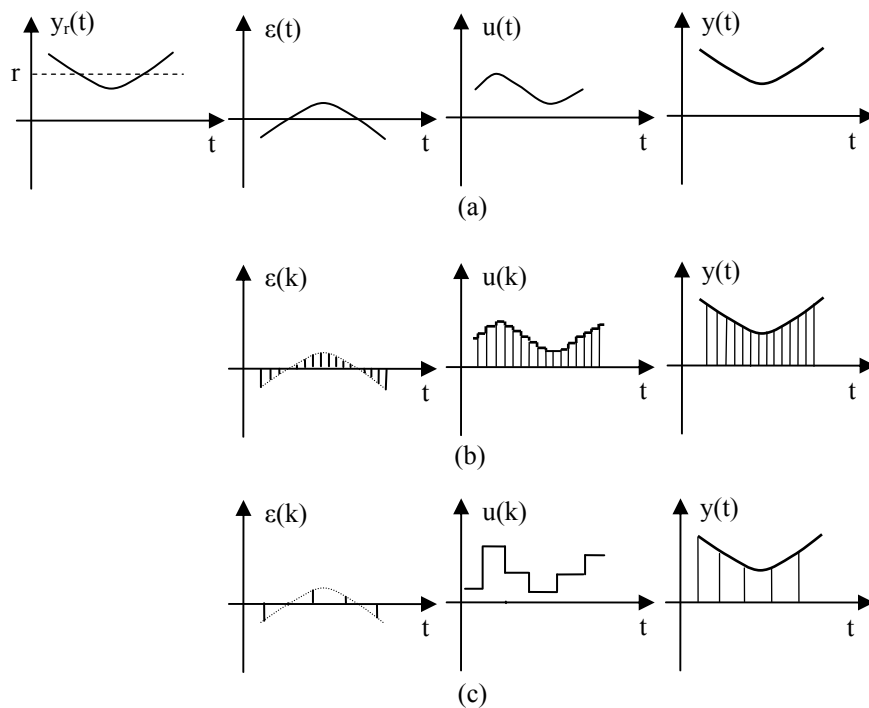


Fig.8.3.

Se poate observa că, în cazul utilizării calculatorului pentru conducerea unui proces continuu, intervenția acestuia asupra procesului se face mult mai des decât în cazul sistemului de reglare numerică, rezultatul obținut fiind același. Important este de observat faptul că în cazul sistemului numeric de reglare, unitatea de calcul numeric intervine mult mai rar asupra sistemului, rămânându-i timp suficient pentru executarea altor sarcini. În această situație, o unitate de calcul numeric poate fi utilizată pentru conducerea simultană a mai multor procese tehnice, avantajul conducerii numerice fiind evident.

8.2. Performanțele sistemelor numerice de reglare la variația semnalului de referință

Se consideră sistemul de reglare numerică prezentat în Fig.8.4(a). Partea fixată a sistemului are funcția de transfer continuă $H_F(s)$. Sistemul

numeric preia, prin eșantionare, semnalul de eroare și furnizează mărimea de comandă către partea fixată prin intermediul unui extrapolator de ordin zero, reprezentat în serie cu partea fixată.

Rezultă că funcția de transfer a căii directe este:

$$H(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} H_F(s) \quad (8.1)$$

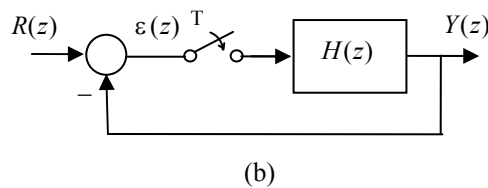
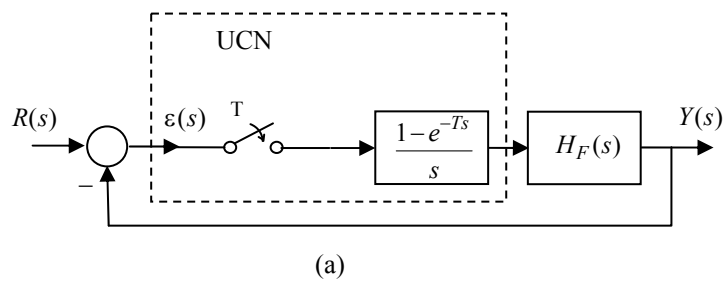


Fig.8.4.

Dacă ne referim la sistemul echivalent din Fig.8.4(b), funcția de transfer discretă aflată pe calea directă a sistemului de reglare este de forma:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = Z \left[\frac{(1 - e^{-Ts})}{s} H_F(s) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{H_F(s)}{s} \right] \quad (8.2)$$

Funcția de transfer care leagă semnalul de eroare de semnalul de referință are expresia:

$$H_{\varepsilon R}(z) = \frac{\varepsilon(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + H(z)} \quad (8.3)$$

Rezultă expresia semnalului de eroare:

$$\varepsilon(z) = H_{\varepsilon R}(z)R(z) = \frac{1}{1+H(z)}R(z) \quad (8.4)$$

Pentru determinarea erorii staționare se va aplica teorema valorii finale :

$$\varepsilon^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+H(z)}R(z) \quad (8.5)$$

În funcție de semnalul de referință considerat se va putea evalua valoarea de regim staționar a erorii.

Pentru a face această analiză, considerăm că funcția de transfer discretă are, în $z = 1$, un număr γ ($\gamma = 0, 1, 2, \dots$) de poli, adică se poate scrie:

$$H(z) = \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}, \quad H^*(1) \neq 0 \quad (8.6)$$

Vom considera drept semnale de referință semnalele de tip treaptă unitară, rampă unitară și parabolă.

(a) *Referința treaptă unitară*, $R(t) = 1(t)$, $R(s) = \frac{1}{s}$

Dacă semnalul de referință este tip treaptă unitară, transformata Z a acestuia este de forma:

$$R(z) = \frac{z}{1-z} \quad (8.7)$$

Rezultă, în această situație:

- Pentru $\gamma = 0$

$$\varepsilon^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} R(z) = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} H^*(z)} \quad (8.8)$$

Coeficientul erorii de poziție este definit prin:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} H(z) = H^*(1) \quad (8.9)$$

Rezultă eroarea staționară:

$$\varepsilon^*(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} \quad (8.10)$$

- Pentru $\gamma \geq 1$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma} = \infty \quad (8.11)$$

Rezultă eroarea de poziție:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}} R(z) = 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

În concluzie, dacă $H(z)$ are cel puțin un pol în $z = 1$, coeficientul erorii de poziție devine infinit, eroarea staționară devine nulă. Aceasta este similară situației prezenței unui pol în $s = 0$ (integrator) în funcția de transfer a căii directe în cazul sistemelor continue.

(b) *Semnal rampă unitară*, $R(t) = t$, $R(s) = \frac{1}{s^2}$

Transformata Z a semnalului rampă unitară este:

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (8.13)$$

Coeficientul erorii de viteză se definește prin relația:

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) \quad (8.14)$$

- Pentru $\gamma = 0$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) = 0 \quad (8.15)$$

Eroarea de viteză va fi, în acest caz:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \infty \end{aligned} \quad (8.16)$$

- Pentru $\gamma = 1$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) = \frac{1}{T} H^*(1) \quad (8.17)$$

Eroarea de regim staționar (eroarea de viteză) va fi:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+H(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{H(z)} \frac{T}{(z-1)} = \frac{1}{K_v} \end{aligned} \quad (8.18)$$

- Pentru $\gamma \geq 2$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H(z) = \infty \quad (8.19)$$

Eroarea de viteză va fi:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}} \frac{Tz}{(z-1)^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Concluzie: dacă funcția de transfer $H(z)$ nu are niciun pol în $z=1$, coeficientul erorii de viteză este nul iar eroarea de viteză este infinită. Dacă are mai mult de doi poli în $z=1$ eroarea de viteză este nulă.

(c) *Semnal tip parabolă*, $R(t) = \frac{t^2}{2}$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$

Transformata Z a acestui semnal de intrare este de forma:

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (8.21)$$

Coeficientul erorii de accelerație se definește astfel:

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z) \quad (8.22)$$

- Pentru $\gamma = 0, 1$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z) = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma} = 0 \quad (8.23)$$

Eroarea de accelerație este:

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \infty\end{aligned}\quad (8.24)$$

- Pentru $\gamma = 2$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z) = \frac{1}{T^2} H^*(1) \quad (8.25)$$

Rezultă expresia erorii de accelerație:

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + H(z)} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{H(z)} \frac{T^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{K_a}\end{aligned}\quad (8.26)$$

- Pentru $\gamma \geq 3$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 H(z) = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma} = \infty \quad (8.27)$$

Eroarea de accelerație va fi, în acest caz:

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} R(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \frac{H^*(z)}{(z-1)^\gamma}} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = 0\end{aligned}\quad (8.28)$$

Pentru acest tip de semnal, sistemul lucrează cu eroare finită dacă are un pol dublu în $z = 1$ și cu eroare nulă dacă are cel puțin trei poli în $z = 1$.

Asocierea dintre comportarea sistemului de reglare continuu cu un anumit număr de poli în origine ($s = 0$) pe calea directă și comportarea sistemului numeric de reglare având același număr de poli în $z = 1$ este evidentă. Acest lucru este ușor de explicat dacă ținem cont de definiția lui z și anume $z = e^{sT}$. Punctului $s = 0$ din planul complex s îi corespunde punctul $z = 1$ din planul complex z . De aici similitudinea rezultatelor obținute.

Deoarece expresiile acestor erori depind de perioada de eșantionare T , este recomandat ca înainte de a trece la calculul acestor erori să fie analizată stabilitatea sistemului care, după cum se știe, depinde de valoarea aleasă pentru perioada de eșantionare.

8.3. Reglatoare analogice pilotate de calculator

Se consideră un sistem de reglare automată, analogic, având structura dată în Fig.8.5.

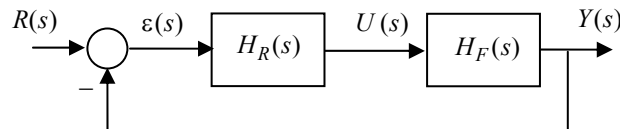


Fig.8.5.

Legea de reglare implementată este de forma:

$$H_R(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (8.29)$$

Pornind de la semnalul de eroare $\varepsilon(t)$, regulatorul analogic cu funcția de transfer dată de relația (8.29) elaborează mărimea de comandă $u(t)$ de forma:

$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \quad (8.30)$$

Legea de reglare dată de relația (8.30) corespunde unui regulator analogic PID mixt. Semnalul de comandă $u(t)$ conține o componentă proporțională cu eroarea $\varepsilon(t)$, o componentă proporțională cu integrala semnalului de eroare și una proporțională cu derivata semnalului de eroare. K_p , T_i , și T_d au semnificațiile cunoscute de factor de amplificare, constantă de timp de integrare și, respectiv, constantă de timp de derivare.

Semnalul de eroare $\varepsilon(t)$ este discretizat, obținându-se secvența de valori $\varepsilon(kT)$. Aceste valori vor fi tratate de către unitatea de calcul numeric, ținând cont de legea de reglare din (8.29), rezultatul fiind mărimea de comandă discretă $u(kT)$. Această mărime de comandă va fi trimisă către procesul continuu prin intermediul convertorului numeric-analogic, CNA. Astfel, mărimea de comandă va fi constantă între două momente de eșantionare consecutive și va fi egală cu valoarea eșantionului anterior. Acest lucru echivalează cu existența între valoarea numerică a eșantionului mărimii de comandă $u(kT)$ și intrarea în proces a unui extrapolator de ordin zero capabil să mențină la intrarea procesului mărimea de comandă între două momente de eșantionare succesive.

Se consideră că regulatorul analogic dat de relația (8.30) este cunoscut, adică sunt cunoscute valorile K_p , T_i , și T_d . Este evident că aceste valori au fost determinate impunându-i-se sistemului anumite performanțe legate de suprareglare, timp de răspuns, etc.

Practic, această lege de reglare analogică trebuie discretizată pentru a putea fi programată și executată de către sistemul numeric de calcul.

Se consideră $t = kT$. Pentru discretizarea legii de comandă din relația (8.30) trebuie approximate integrala și derivata semnalului de eroare.

Dacă vom nota $I(k)$ și respectiv $D(k)$ valoarea integralei și derivatei semnalului de eroare la momentul $t = kT$, vor trebui adoptate reguli pentru determinarea acestor valori.

Pentru calculul numeric al integralei $I(k)$ va fi utilizată metoda trapezelor. Se știe că $\int_{(k-1)T}^{kT} \varepsilon(t) dt$ reprezintă aria cuprinsă între graficul funcției (semnalului) $\varepsilon(t)$, axa timpului și limitele de integrare. Dacă se utilizează a doua formulă a trapezelor modificată (care aproximează aria cu un dreptunghi) se va putea scrie că:

$$I(k) = I(k-1) + \int_{(k-1)T}^{kT} \varepsilon(t) dt = I(k-1) + \varepsilon(kT) \cdot T \quad (8.31)$$

Dând lui k valori în relația (8.31) și adunând membru cu membru aceste relații, se obține:

$$I(k) = \sum_{i=1}^k T \cdot \varepsilon(iT) \quad (8.32)$$

Derivata va putea fi aproximată prin relația:

$$D(k) = \frac{\varepsilon(kT) - \varepsilon((k-1)T)}{T} \quad (8.33)$$

În această situație erorile de aproximare în ceea ce privește calculul valorilor $I(k)$ și $D(k)$ sunt proporționale cu perioada de eșantionare T .

Dacă se dorește o precizie mai ridicată, proporțională cu T^2 , atunci, pentru calculul integralei se va utiliza prima formulă a trapezelor (aproximarea ariei se face printr-un trapez) iar aproximarea derivatei se face pe două perioade de eșantionare:

$$D(k) = \frac{\varepsilon(kT) - \varepsilon((k-2)T)}{2T} \quad (8.34)$$

Frecvent, pentru aceste sisteme de calcul se utilizează relațiile (8.32) și (8.33) pentru aproximarea integralei și derivatei semnalului de eroare.

Ținând cont de aceste precizări, regulatorul PID cu legea de reglare dată de relația (8.30), se poate scrie, notând $u(kT) = u(k)$:

$$u(k) = K_p \left(\varepsilon(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k \varepsilon(i) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) \right) \quad (8.35)$$

Dacă, în relația (8.35) se face trecerea $k \rightarrow k-1$, se obține:

$$u(k-1) = K_p \left(\varepsilon(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon(i) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2)) \right) \quad (8.36)$$

Ținând cont de relația (8.36), relația (8.35) se poate rescrie astfel:

$$\begin{aligned} u(k) = u(k-1) + K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) \varepsilon(k) + \\ + K_p \left(- \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) \varepsilon(k-1) + \frac{T_d}{T} \varepsilon(k-2) \right) \end{aligned} \quad (8.37)$$

Disponând de mărimea de comandă $u(k-1)$, de eșantioanele $\varepsilon(k)$, $\varepsilon(k-1)$, și $\varepsilon(k-2)$ ale semnalului de eroare se poate determina mărimea de comandă $u(k)$ utilizând relația (8.37).

Metoda de obținere a mărimii de comandă $u(k)$ descrisă pentru regulatorul PID poate fi utilizată pentru scrierea acesteia și pentru alte legi de reglare, PD sau PI, ținând cont că legea de reglare PID înglobează toate cele trei componente de bază ale unui regulator standard.

Funcția de transfer discretizată a regulatorului PID se obține din relația (8.37) prin trecere în transformate z :

$$H_R(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{K_p \left[\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) - \left(1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) z^{-1} + \frac{T_d}{T} z^{-2} \right]}{1 - z^{-1}} \quad (8.38)$$

8.4. Integrarea și derivarea numerică

Pentru a putea scrie mai rapid funcția de transfer a unui regulator PID numeric provenit dintr-un regulator analogic, vom considera separat cele

două componente, integrală și derivativă, pentru care vom deduce funcția de transfer discretă.

(a) *Integratorul numeric*, $\frac{1}{sT_i}$

Vom considera funcția de transfer a integratorului:

$$H_I(s) = \frac{1}{sT_i} \quad (8.39)$$

Funcția de transfer discretă se obține sub forma:

$$H_I(z) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^2T_i}\right) \quad (8.40)$$

Doarece transformata z a semnalului rampă este cunoscută:

$$Z\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (8.41)$$

Rezultă, înlocuind (8.41) în relația (8.40), funcția de transfer discretă:

$$H_I(z) = (1 - z^{-1}) \frac{Tz}{T_i(z-1)^2} = \frac{T}{T_i} \frac{1}{z-1} \quad (8.42)$$

Dacă se consideră funcția de transfer discretă ca având intrarea $\varepsilon(z)$ și ieșirea $U(z)$, adică:

$$H_I(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{T}{T_i} \frac{1}{z-1} \quad (8.43)$$

Rezultă de aici că avem:

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{T}{T_i} z^{-1} \varepsilon(z) \quad (8.44)$$

Se poate scrie acum ecuația cu diferențe sub forma:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k-1) \quad (8.45)$$

Relația (8.45) descrie un proces de acumulare deoarece pentru $\varepsilon(k) = ct.$, mărimea de comandă crește la fiecare pas cu cantitatea $\frac{T}{T_i} \varepsilon(k)$.

În majoritatea aplicațiilor practice se preferă ca în ecuația cu diferențe (8.45) să apară eroarea din pasul curent:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{T_i} \varepsilon(k) \quad (8.46)$$

În această situație funcția de transfer discretă a integratorului numeric va avea expresia:

$$H_I(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \quad (8.47)$$

(b) *Derivarea numerică, sT_d*

Pornind de la definiția derivării numerice,

$$u(k) = \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) \quad (8.48)$$

se obține relația în transformate z de forma:

$$U(z) = \frac{T_d}{T} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) \quad (8.49)$$

Rezultă funcția de transfer discretă:

$$H_D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \quad (8.50)$$

(c) *Element derivativ cu filtru*, $\frac{sT_d}{1+sT_1}$

În acest caz, funcția de transfer continuă este de forma:

$$H_{DT}(s) = \frac{sT_d}{1+sT_1} \quad (8.51)$$

Funcția de transfer discretă va fi obținută prin metoda cunoscută:

$$H_{DT}(z) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{H_{DT}(s)}{s}\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{T_d}{1+sT_1}\right) \quad (8.52)$$

Ultima discretizare se referă la un element de ordinul întâi, pentru care forma discretă este cunoscută:

$$Z\left(\frac{1}{1+sT_1}\right) = Z\left(\frac{\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{T_1}}\right) = \frac{1}{T_1} \frac{z}{z-z_0} \quad (8.53)$$

unde $z_0 = e^{-\frac{T}{T_1}}$.

Rezultă funcția de transfer discretă:

$$H_{DT}(z) = \frac{T_d}{T_1} \frac{z-1}{z-z_0} \quad (8.54)$$

În aceste condiții, funcția de transfer discretă a unui regulator continuu PID cu filtru pe componenta integrală având funcția de transfer:

$$H_{PID-T}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_1} \right) \quad (8.55)$$

este de forma:

$$H_{PID-T}(z) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T_1} \frac{z-1}{z-z_0} \right) \quad (8.56)$$

Efectuând calculele și înmulțind relația obținută cu z^{-2} forma funcției de transfer discrete ce permite programarea facilă a ecuației recursive de reglare:

$$H_{PID-T}(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p \left(1 + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z-z_0} \right) \quad (8.57)$$

în care s-a notat:

$$K_i = \frac{T}{T_i}, \quad K_d = \frac{T_d}{T_1} \quad (8.58)$$

Dacă regulatorul PID are componenta derivativă afectată de un element cu întâziere de ordinul întâi atunci funcția de transfer a regulatorului este de forma:

$$\begin{aligned} H_{PID-T}(z) &= \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \\ &= K_p \frac{(1 + K_d + K_i) - (1 + z_0(1 + K_i) + 2K_d)z^{-1} + (z_0 + K_d)z^{-2}}{1 - (1 + z_0)z^{-1} + z_0z^{-2}} \end{aligned} \quad (8.59)$$

Dacă nu se dorește saturarea mărimii de comandă la variații bruște ale mărimii de referință fără a se filtra componenta derivativă, se poate utiliza pentru regulatorul PID structura prezentată în Fig.8.6.

Se observă că, în această situație, efectul derivativ și proporțional nu se aplică semnalului de eroare ci numai mărimii măsurate, $y(t)$. Variație prin salt ar putea avea numai semnalul de eroare datorită posibilității de modificare prin salt a mărimii de referință. Ori, acestui semnal i se aplică

doar componenta integrală a mărimii de comandă (semnalul de eroare integrat), deci este evitat saltul la nivelul mărimii de comandă.

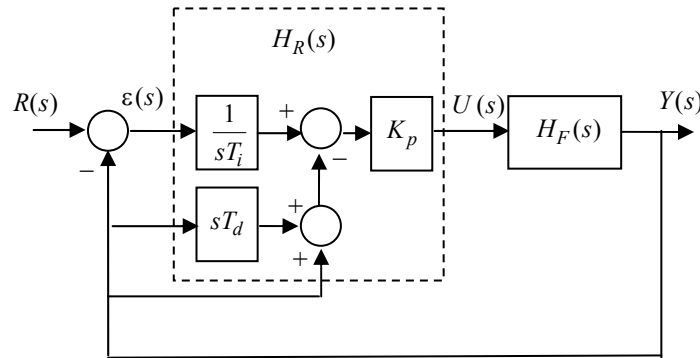


Fig.8.6.

Mărimea de comandă, în transformate Laplace, este de forma:

$$\begin{aligned}
 U(s) &= K_p \frac{1}{sT_i} \varepsilon(s) - (K_p + sT_d)Y(s) = \\
 &= K_p \frac{1}{sT_i} (R(s) - Y(s)) - (K_p + sT_d)Y(s)
 \end{aligned}
 \tag{8.60}$$

Elaborarea mărimii de comandă discretizată se poate face ușor dacă se rescrie relația (8.60) în domeniul timpului. Vom ține cont, în acest sens, că înmulțirea cu s al unei transformate Laplace echivalează cu derivarea originalului. Vom putea scrie:

$$\dot{u}(t) = \frac{K_p}{T_i} (r(t) - y(t)) - K_p \dot{y}(t) - K_p T_d \ddot{y}(t)
 \tag{8.61}$$

Dacă derivatele care apar în relația (8.61) se înlocuiesc prin expresii cu diferențe finite la stânga, de forma:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(k) - u(k-1)}{T} \quad (8.62)$$

$$\ddot{j}(t) = \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T^2} \quad (8.63)$$

atunci se poate scrie forma discretizată a legii de comandă:

$$u(k) = u(k-1) + K_i(r(k) - y(k)) - K_p(y(k) - y(k-1)) - K_d((y(k) - 2y(k-1) + y(k-2))) \quad (8.64)$$

unde:

$$K_i = \frac{K_p T}{T_i}, \quad K_d = \frac{K_p T_d}{T} \quad (8.65)$$

Constantele K_i și K_d depind de parametrii de acordare ai regulatorului și de perioada de eșantionare T .

8.4. Corectoare analogice pilotate de calculator

Corectoarele analogice cu avans sau întârziere de fază pot fi discretizate pentru a putea fi implementate pe structuri numerice de calcul. Pentru exemplificare, se consideră corectorul cu avans de fază cu funcția de transfer standard de forma:

$$H_C(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = \alpha \frac{1 + sT_\alpha}{1 + s\alpha T_\alpha}, \quad \text{cu } 0 < \alpha < 1. \quad (8.66)$$

Pentru a putea face discretizarea, relația (8.66) se pune sub forma:

$$(1 + s\alpha T_\alpha)U(s) = \alpha(1 + sT_\alpha)\varepsilon(s) \quad (8.67)$$

Revenim în domeniul timpului:

$$u(t) + \alpha T_\alpha \dot{u}(t) = \alpha \varepsilon(t) + \alpha T_\alpha \dot{\varepsilon}(t) \quad (8.68)$$

Derivatele semnalelor $u(t)$ și $\varepsilon(t)$ se aproximează prin expresii de forma celei din relația (8.62) și se obține:

$$u(k) + \alpha T_\alpha \frac{u(k) - u(k-1)}{T} = \alpha \varepsilon(k) + \alpha T_\alpha \frac{\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)}{T} \quad (8.69)$$

în care am notat:

$$u(k) = u(kT), \quad \varepsilon(k) = \varepsilon(kT) \quad (8.70)$$

Rezultă expresia legii de comandă:

$$u(k) = \frac{\alpha T_\alpha}{T + \alpha T_\alpha} u(k-1) + \frac{\alpha(T + T_\alpha)}{T + \alpha T_\alpha} \varepsilon(k) - \frac{\alpha T_\alpha}{T + \alpha T_\alpha} \varepsilon(k-1) \quad (8.71)$$

Pentru ca rezultatele obținute să fie foarte apropiate de semnalul analogic este necesar să avem:

$$\frac{T}{T_\alpha} \ll 1 \quad (8.72)$$

În această situație semnalul de comandă va depinde de semnalul de comandă la momentul anterior și de variația semnalului de eroare.

8.4.1. Corectoare numerice obținute prin transformarea Tustin

Este posibilă obținerea unei forme discrete $H_C(z)$ a corectorului analogic $H_C(s)$ prin înlocuirea variabilei complexe s prin variabila complexă z dată de transformarea biliniară (numită transformarea Tustin):

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (8.73)$$

Inversa acestei transformate este:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (8.74)$$

Dacă frecvența de eșantionare este suficient de mare (T suficient de mică) atunci semnalul de la ieșirea compensatorului digital este foarte aproape de forma semnalului analogic de la ieșirea compensatorului continuu.

Alegerea perioadei de eșantionare, după recomandările făcute de Astrom și Wittenmark, se face astfel încât:

$$0.15 \cdot \omega_M < T < 0.5 \cdot \omega_M \quad (8.75)$$

unde ω_M este pulsația corespunzătoare intersecției cu linia de 0 dB a caracteristicii magnitudine-pulsație a sistemului în buclă deschisă ce conține partea fixată serie cu corectorul analogic. De obicei, valoarea dată de relația (8.75) se consideră a fi zona în care se poate situa valoarea maximă a perioadei de eșantionare, în practică utilizându-se valori de 2-3 ori mai mici.

Dacă se consideră regulatorul PID dat de relația (8.55), având funcția de transfer:

$$H_{PID-T}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_1} \right) \quad (8.76)$$

atunci, prin aplicarea transformării biliniare date de relația (8.71) forma discretizată a regulatorului va fi:

$$H_{PID-T}(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} T_i} + \frac{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} T_d}{1 + \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} T_1} \right) \quad (8.77)$$

Simplificând scrierea, se obține:

$$H_{PID-T}(z) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_{id}} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_{dd}}{T} \frac{z-1}{z-p_0} \right) \quad (8.78)$$

unde:

$$T_{id} = 2T_i, \quad T_{dd} = \frac{T_d}{\frac{1}{2} + \frac{T_1}{T}}, \quad p_0 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{T_1}{T}}{-\frac{1}{2} + \frac{T_1}{T}} \quad (8.79)$$

Zeroul în $z = -1$ al componentei integrale se datorează zeroului în $s = +\infty$ al componentei integrale a funcției de transfer a regulatorului continuu care, prin transformarea biliniară (8.71), induce acest zerou în componenta integrală a funcției de transfer discrete.

Pentru implementarea acestui regulator este necesară trecerea acestuia în forma ecuației cu diferențe. Pentru aceasta se consideră funcția de transfer în z^{-1} :

$$H_{PID-T}(z^{-1}) = K_p \left(1 + \frac{T}{T_{id}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{T_{dd}}{T} \frac{1-z^{-1}}{1-p_0 z^{-1}} \right) \quad (8.80)$$

Componentele integratoare și derivate ale semnalului de comandă vor avea expresiile:

$$u_i(k) = u_i(k-1) + \frac{T}{T_{id}} (\varepsilon(k) + \varepsilon(k-1)) \quad (8.81)$$

$$u_d(k) = p_0 \cdot u_d(k-1) + \frac{T_{dd}}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1))$$

Mărimea de comandă la momentul kT va avea expresia:

$$u(k) = K_p (\varepsilon(k) + u_i(k) + u_d(k)) \quad (8.82)$$

Scrierea sub această formă a mărimii de comandă este posibilă deoarece funcția de transfer discretă a regulatorului a fost exprimată prin componentele sale. Dacă se aduce expresia la același numitor și se scrie ecuația cu diferențe pe întreaga relație se obține o formă echivalentă pentru mărimea de comandă.

8.5. Implementarea reguletoarelor (corectoarelor) digitale.

Se consideră că pentru un regulator sau corector analogic s-a obținut un regulator (corector) numeric având funcția de transfer discretă de forma:

$$H_R(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (8.83)$$

Funcția de transfer discretă trebuie să aibă gradul polinomului în z de la numitor mai mare sau egal decât gradul polinomului în z de la numărător. Această condiție derivă din necesitatea existenței posibilității de implementare fizică a corectorului discret și ne asigură că mărimea de ieșire a acestuia la momentul kT depinde numai de mărimile de intrare din momentul curent sau din momente anterioare și de mărimea de ieșire din momente anterioare (condiția de cauzalitate).

Ținând cont de relația (8.83) se poate scrie:

$$U(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}) = \varepsilon(z)(b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) \quad (8.84)$$

Rezultă de aici expresia mărimii de comandă la momentul kT :

$$u(k) = b_2 \varepsilon(k) + b_1 \varepsilon(k-1) + b_0 \varepsilon(k-2) - a_1 u(k-1) - a_0 u(k-2) \quad (8.85)$$

Având la dispoziție eșantioanele mărimilor de comandă și de eroare din momentele menționate, relația (8.85) poate fi implementată foarte facil pe un sistem de calcul numeric. Unii dintre coeficienții care apar în relația (8.85) pot să lipsească, trebuind să fie respectată condiția de cauzalitate.

8.6. Sisteme numerice de reglare automată

Pentru punerea în practică a unui sistem numeric de reglare automată trebuie să ținem cont de regulile care decurg din ceea ce presupune obținerea modelului discret al unui sistem continuu. Regulatorul numeric ce urmează a fi implementat nu mai constituie varianta discretizată a unui regulator continuu construit pentru procesul continuu ci reprezintă un regulator având o construcție specială care depinde de forma discretă a procesului continuu căruia i s-a asociat un extrapolator de ordin zero. Pentru implementarea unui sistem numeric de reglare automată trebuie parcurse mai multe etape și anume:

- (i) Alegerea perioadei de eșantionare T și obținerea, prin calcul sau identificare, fie a ecuației cu diferențe fie a funcției de transfer discrete a părții fixate a procesului.

Perioada de eșantionare trebuie aleasă astfel încât să nu fie nici prea mare (existând pericolul pierderii de informații) nici prea mică (solicitând excesiv resursele sistemului de calcul), așa cum s-a prezentat și în cazul implementării unui regulator digital derivat dintr-un regulator continuu. În practică, pulsația de eșantionare se alege astfel încât:

$$5 \cdot \omega_M < \omega_T < 25 \cdot \omega_M \quad (8.86)$$

Pulsația ω_M reprezintă pulsația aferentă benzii de trecere a sistemului închis.

Dacă partea fixată este un element de ordinul întâi având o constantă de timp T_F atunci pulsația de eșantionare va fi:

$$\frac{5}{T_F} < \omega_T < \frac{25}{T_F} \quad (8.87)$$

Dacă relația (8.87) se exprimă în funcție de perioada de eșantionare se poate scrie:

$$\frac{2\pi}{25} T_F < T < \frac{2\pi}{5} T_F \quad (\text{aprox. } \frac{1}{4} T_F < T < T_F) \quad (8.88)$$

Dacă sistemul este de ordinul doi, având funcția de transfer standard, atunci ținând cont că pentru $\xi = 0.7$ pulsația de tăiere este ω_n , se poate deduce, pentru această valoare a amortizării pulsația de eșantionare:

$$5 \cdot \omega_n < \omega_T < 25 \cdot \omega_n \quad (8.89)$$

Exprimarea în funcție de perioada de eșantionare, considerând produsul $T\omega_n$, conduce la:

$$\frac{2\pi}{25} < T\omega_n < \frac{2\pi}{5} \quad (\text{aprox. } 0.25 < T\omega_n < 1.25) \quad (8.90)$$

- (ii) Alegerea unui model numeric adecvat, care poate fi un model oarecare sau (de obicei) un element de ordin doi. Modelul ales se consideră având un câștig static unitar.

Dacă modelul este unul oarecare, acesta poate avea funcția de transfer discretă de forma:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0}{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \dots + b_0} \cdot \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (8.91)$$

Este evident că acest model este unul cauzal, polinoamele de la numărător și numitor având grade egale. Unii coeficienți pot fi nuli, cu păstrarea condiției de cauzalitate. Pentru a înțelege care coeficienți ar putea să fie nuli, se poate considera forma în z^{-1} a funcției de transfer $H_m(z)$, care se obține înmulțind cu z^{-n} atât numărătorul cât și numitorul fracției în z care apare în expresia funcției de transfer discrete.

Dacă acestui model i se aplică un semnal treaptă unitară având

$$R(z) = \frac{z}{z-1}, \text{ atunci câștigul static al acestuia va fi:}$$

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)H_m(z)R(z) = 1 \quad (8.92)$$

Această condiție ne asigură că eroarea staționară este nulă dacă se aplică sistemului un semnal treaptă unitară. Pentru ca eroarea de viteză să fie nulă este necesar ca $1 - H_m(z)$ să aibă un zero dublu în $z = 1$, pentru eroare de accelerație nulă fiind necesar un zero triplu în $z = 1$. Dacă aceste zerouri menționate lipsesc, înseamnă că funcția de transfer discretă a părții fixate nu are acești poli în $z = 1$, iar aceștia vor trebui introduși pe calea directă de către funcția de transfer discretă a regulatorului, $H_R(z)$.

Dacă modelul ales este unul de ordin doi, din considerentul ca eroarea staționară la un semnal treaptă unitară să fie nulă, câștigul static va trebui să fie unitar, modelul fiind de forma:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1 + a_1 + a_0}{1 - z_0} \frac{z - z_0}{z^2 + a_1z + a_0} \quad (8.93)$$

Există situații când este necesar ca diferența dintre gradul numitorului și gradul numărătorului funcției de transfer a modelului să fie de două unități. În această situație, se va considera pentru model funcția de transfer:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1 + a_1 + a_0}{z^2 + a_1z + a_0} \quad (8.94)$$

Câștigul static se menține unitar și pentru această formă a modelului.

Dacă este necesară o diferență de trei unități între gradul numitorului și al numărătorului funcției de transfer a modelului, se pot considera următoarele funcții de transfer pentru model:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1 + a_1 + a_0}{z^2 + a_1z + a_0} \cdot \frac{1}{z} \quad (8.95)$$

și respectiv:

$$H_m(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1 + a_1 + a_0}{1 - z_0} \frac{z - z_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \cdot \frac{1}{z^2} \quad (8.96)$$

Indiferent de modelul ales trebuie ținut cont de faptul ca acesta să fie stabil, deci toți polii acestuia să se afle în interiorul cercului de rază unitară din planul complex z .

Este evident că răspunsul dat de funcția de transfer din (8.95) este întârziat cu un pas față de cel dat de funcția de transfer din relația (8.94). Similar, este evidentă o întârziere cu doi pași a răspunsului modelului din relația (8.96) față de cel al modelului din relația (8.93)

(iii) Conceperea regulatorului numeric.

Acest lucru presupune alegerea unei anumite structuri a regulatorului sau de a determina forma acestuia în vederea atingerii modelului impus. Artă automatistului constă în determinarea parametrilor regulatorului.

(iv) Scrierea ecuațiilor cu diferențe și implementarea acestora.

După ce structura regulatorului a fost determinată (deci suntem în posesia funcției de transfer discrete a regulatorului, $H_R(z)$) este necesară scrierea ecuației cu diferențe corespunzătoare acestei funcții de transfer și implementarea acesteia pe un sistem de calcul numeric. Mărimea de comandă la momentul kT , notată simplu $u(k)$ va depinde de semnalul de eroare și de semnalele de comandă din momentele anterioare (inclusiv de eroarea din pasul curent). Deoarece sistemul de calcul memorează toate aceste valori anterioare momentului curent, valori necesare elaborării mărimii de comandă, rezultă că un regulator numeric se pretează pentru conducerea sistemelor cu timp mort, timpul mort fiind reprezentat în sistemul numeric de întârzierea cu un anumit număr de perioade de eșantionare a utilizării semnalului de eroare în elaborarea comenzii.

8.7. Structura reguletoarelor numerice

Regulatorul numeric, plasat cel mai adesea pe calea directă a sistemului numeric de reglare, se prezintă sub forma raportului a două polinoame în z , cu gradul numitorului mai mare sau egal decât gradul numărătorului.

Se consideră că partea fixată, împreună cu extrapolatorul de ordin zero, are funcția de transfer discretă:

$$H_F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.97)$$

Sistemul numeric de reglare este prezentat în Fig.8.7.

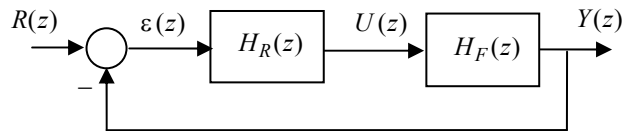


Fig.8.7.

Funcția de transfer în buclă închisă va avea expresia:

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{H_R(z)H_F(z)}{1 + H_R(z)H_F(z)} \quad (8.98)$$

Se pune problema determinării polinoamelor $A(z)$ și $B(z)$ astfel încât funcția de transfer a sistemului închis să coincidă cu funcția de transfer a modelului, $H_m(z)$.

Dacă pentru sistemul în buclă închisă a fost impus un model reprezentat de funcția de transfer discretă $H_m(z)$, impunând condiția ca funcția de transfer a sistemului închis să coincidă cu funcția de transfer a modelului, se obține:

$$\frac{H_R(z)H_F(z)}{1 + H_R(z)H_F(z)} = H_m(z) \quad (8.99)$$

Dacă se calculează funcția de transfer a regulatorului, se obține:

$$H_R(z) = \frac{1}{H_F(z)} \frac{H_m(z)}{1 - H_m(z)} \quad (8.100)$$

Dacă se notează:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (8.101)$$

atunci, funcția de transfer a regulatorului, ținând cont și de relația (8.97), capătă forma:

$$H_R(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{B_m(z)}{A_m(z) - B_m(z)} \quad (8.102)$$

În general, funcția de transfer a modelului are gradul polinomului de la numitor mai mare decât gradul polinomului de la numărător. Regulatorul numeric va trebui să fie unul cauzal, deci vom avea:

$$\text{grad}A_m(z) - \text{grad}B_m(z) \geq \text{grad}A(z) - \text{grad}B(z) \quad (8.103)$$

Dacă această ultimă condiție nu este îndeplinită, este necesară introducerea unor întâzieri suplimentare în funcția de transfer a modelului, așa cum este sugerat de relațiile (8.94) și (8.96).

Exemplu:

Se consideră sistemul din Fig.8.7 în care funcția de transfer a părții fixate este:

$$H_F(z) = \frac{0.12(z + 0.967)}{z^2 - 1.682z + 0.907} \quad (8.104)$$

Această funcție de transfer corespunde unui element de ordin doi (cărui i s-a asociat un extrapolator de ordin zero) având pulsația naturală $\omega_n = 0.7$ [rad/s] și factorul de amortizare $\xi = 0.1$.

Se dorește ca sistemul închis să se comporte asemănător unui sistem continuu de ordin doi având aceeași pulsație naturală dar amortizarea $\xi = 0.8$, deci eroare staționară nulă la un semnal treaptă unitară.

Se alege perioada de eșantionare astfel încât $T\omega_n = 0.5$. Rezultă valoarea perioadei de eșantionare $T = 0.7$ [s].

Ținând cont de precizările impuse cu privire la model, rezultă pentru acesta funcția de transfer:

$$H_m(z) = \frac{0.163}{z^2 - 1.293z + 0.456} \quad (8.105)$$

Revenind la relația (8.100) rezultă produsul:

$$\begin{aligned} H_R(z) &= \frac{1}{H_F(z)} \frac{0.163}{z^2 - 1.293z + 0.293} = \\ &= \frac{z^2 - 1.682z + 0.907}{0.12(z + 0.967)} \frac{0.163}{z^2 - 1.293z + 0.293} \end{aligned} \quad (8.106)$$

Rezultă forma finală a regulatorului:

$$H_R(z) = \frac{z^2 - 1.682z + 0.907}{(z + 0.967)} \frac{1.358}{z^2 - 1.293z + 0.293} \quad (8.107)$$

Regulatorul astfel determinat este unul causal, deci se poate programa legea de reglare dacă se determină forma finală a relației (8.107):

$$H_R(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{1.358z^2 - 2.285z + 1.231}{z^3 - 0.326z^2 - 0.957z + 0.283} \quad (8.108)$$

Dacă se înmulțește relația (8.108) atât la numitor cât și la numărător cu z^{-3} se obține:

$$H_R(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{1.358z^{-1} - 2.285z^{-2} + 1.231z^{-3}}{1 - 0.326z^{-1} - 0.957z^{-2} + 0.283z^{-3}} \quad (8.109)$$

Legea de reglare se obține prin trecerea în domeniul timp:

$$u(k) = 0.326u(k-1) + 0.957u(k-2) - 0.283u(k-3) + 1.358\varepsilon(k-1) - 2.285\varepsilon(k-2) + 1.231\varepsilon(k-3) \quad (8.110)$$

Regulatorul numeric, având funcția de transfer $H_R(z)$ se află plasat pe calea directă și tratează numai semnalul de eroare. Dacă se dorește o structură mai complexă a regulatorului numeric, se poate adopta o structură generală de tipul celei prezentate în Fig.8.8.

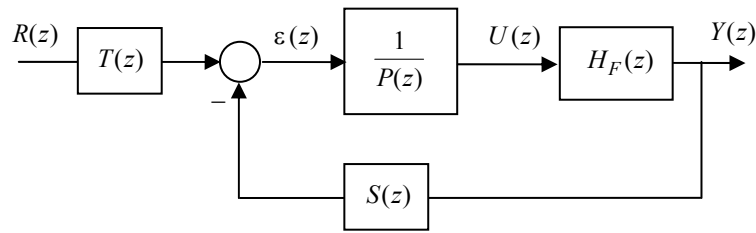


Fig.8.8.

Structura prezentată se poate reduce la structura standard din Fig.8.7 dacă se consideră că polinoamele (în z^{-1}) $T(z)$ și $S(z)$ sunt identice. Acestea pot trece prin sumator, ajung pe calea directă și reconstituie regulatorul cu funcția de transfer scrisă ca raport a două polinoame.

În situația prezentată în Fig.8.8 se poate scrie:

$$U(z) = \frac{1}{P(z)} \varepsilon(z) = \frac{1}{P(z)} (T(z)R(z) - S(z)Y(z)) \quad (8.111)$$

Mărimea de comandă scrisă pe baza relației (8.111) după revenirea în domeniul timpului este de forma:

$$u(k) = -\sum_{i \geq 1} p_i u(k-i) + \sum_{j \geq 0} t_j r(k-j) - \sum_{l \geq 0} s_l u(k-l) \quad (8.112)$$

unde p_i , t_j și s_l sunt coeficienții puterilor lui z^{-i} , z^{-j} și z^{-l} în polinoamele $P(z)$, $T(z)$ și respectiv $S(z)$.

Funcția de transfer în buclă închisă va avea expresia:

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{H_F(z)T(z)}{P(z) + H_F(z)S(z)} \quad (8.113)$$

Se pune problema determinării polinoamelor $P(z)$, $T(z)$ și respectiv $S(z)$ pentru ca funcția de transfer în buclă închisă a sistemului discret, $H_0(z)$, să coincidă cu funcția de transfer a modelului, $H_m(z)$.

Dacă, pentru această structură a sistemului de reglare, se consideră partea fixată având forma:

$$H_F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.114)$$

atunci funcția de transfer în buclă închisă se poate scrie:

$$H_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{B(z)T(z)}{P(z)A(z) + B(z)S(z)} \quad (8.115)$$

8.8. Determinarea polinoamelor $P(z)$, $T(z)$ și $S(z)$

Pentru determinarea polinoamelor care intră în compunerea regulatorului, se va considera mai întâi polinomul de la numărătorul funcției de transfer a părții fixate, $B(z)$. Acesta conține toate zerourile funcției de transfer a părții fixate, unele fiind zerouri stabile (deci în interiorul cercului de rază unitară din planul z), unele fiind instabile. Vom separa aceste zerouri punând:

$$B(z) = B_s(z)B_i(z) \quad (8.116)$$

unde $B_s(z)$ reprezintă partea care conține zerourile stabile iar $B_i(z)$ reprezintă partea cu zerouri instabile.

Funcția de transfer a modelului se consideră de forma:

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (8.117)$$

Funcția de transfer a modelului din relația (8.117) trebuie să conțină cel puțin întârzierile intrinseci ale sistemului, care nu vor putea fi compensate, deci vom avea:

$$\text{grad}A_m(z) - \text{grad}B_m(z) \geq \text{grad}A(z) - \text{grad}B(z) \quad (8.118)$$

Zerourile instabile, deci necompensabile din $B(z)$ vor trebui să se regăsească în $B_m(z)$, deci se consideră:

$$B_m(z) = B_i(z)B_{m1}(z) \quad (8.119)$$

Polinomul $P(z)$ va trebui să compenseze zerourile stabile ale procesului, conținute în $B_s(z)$ dar să introducă și un pol de grad m în $z=1$, (în funcție de tipul semnalului de intrare) pentru a se obține o precizie impusă:

$$P(z) = (z-1)^m B_s(z)P_1(z) \quad (8.120)$$

Cu precizările făcute până în acest punct, se poate scrie identitatea dintre funcția de transfer în buclă închisă și model sub forma:

$$\frac{B_s(z)B_i(z)T(z)}{(z-1)^m B_s(z)P_1(z)A(z) + B_s(z)B_i(z)S(z)} = \frac{B_i(z)B_{m1}(z)}{A_m(z)} \quad (8.121)$$

După simplificările care se pot face se obține:

$$\frac{T(z)}{(z-1)^m P_1(z)A(z) + B_i(z)S(z)} = \frac{B_{m1}(z)}{A_m(z)} \quad (8.122)$$

Polinomul $T(z)$ se va factoriza sub forma:

$$T(z) = A_0(z)B_{m1}(z) \quad (8.123)$$

Rezultă, în final, identitatea:

$$(z-1)^m P_1(z)A(z) + B_i(z)S(z) = A_0(z)A_m(z) \quad (8.124)$$

Polinoamele $P_1(z)$, $S(z)$, și $A_0(z)$ care intervin se vor considera ca având cele mai mici grade care pot satisface, din punctul de vedere al identității, relația (8.124). Singura condiție care se pune, (pentru simplificarea problemei), este ca polinoamele $P_1(z)$ și $A_0(z)$ să aibă coeficientul puterii maxime a lui z egal cu unitatea

Reglarea cu model intern

Se consideră un sistem continuu, având funcția de transfer a părții fixate notată $H_F(s)$. Reglarea cu model intern apare ca o alternativă la reglarea standard utilizând regulator proporțional integrator derivativ, PID, și reacție negativă.

Sistemul de reglare cu model intern, prezentat în Fig.8.9 conține pe calea directă un regulator cu funcția de transfer $H_{R1}(s)$. Sistemul mai conține un model al părții fixate, având funcția de transfer $H_m(s)$. Modelul este conecat în paralel cu procesul supus reglării. Mărimea de reacție este compusă din diferența dintre mărimea de ieșire a procesului, $Y(s)$, și mărimea de ieșire a modelului, $W(s)$. De menționat că mărimea de ieșire a procesului conține și o perturbație aditivă, $V(s)$.

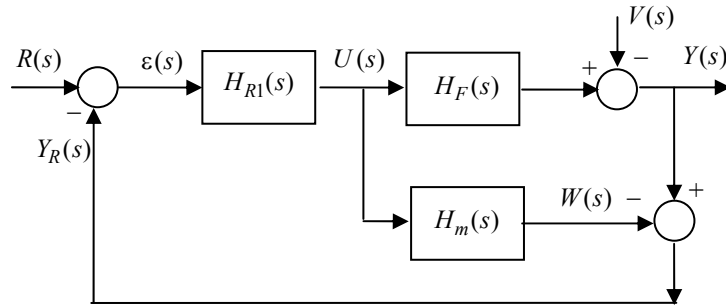


Fig.8.9.

Dacă modelul părții fixate este perfect, adică $H_m(s) = H_F(s)$, din Fig.8.9 rezultă că vom avea:

$$Y_R(s) = Y(s) - W(s) = H_F(s)U(s) + V(s) - H_m(s)U(s) = V(s) \quad (8.125)$$

Acțiunea de corecție a regulatorului se va manifesta asupra semnalului de eroare $\varepsilon(s) = R(s) - V(s)$, deci, din punctul de vedere al mărimii de ieșire $Y(s)$ sistemul de reglare devine deschis și avem:

$$Y(s) = H_{R1}(s)H_F(s)R(s) + (1 - H_{R1}(s)H_F(s))V(s) \quad (8.126)$$

Dacă se consideră că modelul părții fixate este imperfect, adică $H_m(s) \neq H_F(s)$, funcția de transfer care leagă mărimea de ieșire de cele două mărimi de intrare (referința $R(s)$ și perturbația $V(s)$) este de forma:

$$Y(s) = \frac{H_{R1}(s)H_F(s)}{1 + H_{R1}(s)(H_F(s) - H_m(s))}R(s) + \frac{1 - H_{R1}(s)H_m(s)}{1 + H_{R1}(s)(H_F(s) - H_m(s))}V(s) \quad (8.127)$$

Relația (8.127) a fost obținută aplicând principiul suprapunerii efectelor. Dacă pentru $V(s) = 0$ schema obținută este cunoscută, funcția de transfer care leagă ieșirea $Y(s)$ de semnalul de referință $R(s)$, pentru situația în

care sistemul lucrează numai cu perturbația $V(s)$ și referință nulă, schema echivalentă pentru care se calculează funcția de transfer corespunzătoare este prezentată în Fig.8.10.

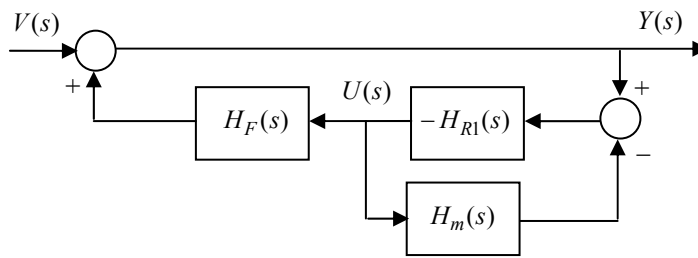


Fig.8.10.

Dacă se notează:

$$H_{YR}(s) = \frac{H_{R1}(s)H_F(s)}{1 + H_{R1}(s)(H_F(s) - H_m(s))} \quad (8.128)$$

$$H_{YU}(s) = \frac{1 - H_{R1}(s)H_m(s)}{1 + H_{R1}(s)(H_F(s) - H_m(s))}$$

atunci relația (8.127) se poate scrie sub forma:

$$Y(s) = H_{YR}(s)R(s) + H_{YU}(s)V(s) \quad (8.129)$$

Se constată că avem:

$$H_{YR}(s) + H_{YU}(s) = 1 \quad (8.130)$$

Se constată că, dacă sistemului i se aplică simultan semnale de intrare de tip treaptă unitară, potrivit relației (8.130) rezultă că cele două răspunsuri considerate separat (la referință și perturbație) sunt complementare:

$$y(t) = y_R(t) + y_V(t) = 1 \quad (8.131)$$

În concluzie, potrivit relației (8.131), cu cât răspunsul variația treaptă unitară a semnalului de referință este mai satisfăcător, cu atât și efectul unui semnal treaptă la nivelul mărimii perturbatoare va avea un efect mai mic asupra mărimii de ieșire a sistemului.

Cazul ideal îl constituie situația în care avem:

$$H_{R1}(s) = \frac{1}{H_m(s)} \quad (8.132)$$

În această situație ideală avem $H_{YU}(s) = 0$, $H_{YR}(s) = 1$ mărimea de ieșire $Y(s)$ nu mai este afectată de perturbația $V(s)$ și va urmări fără eroare mărimea de referință $R(s)$.

Pentru ca valoarea de regim staționar a mărimii de ieșire să fie egală cu mărimea de referință (constantă) este necesar să avem:

$$H_{R1}(0) = \frac{1}{H_m(0)} \quad (8.133)$$

indiferent de realizarea sau nu a condiției (8.132). Acest lucru se poate vedea cu ușurință dacă se aplică teorema valorii finale pentru semnalele de intrare $R(s)$ și $V(s)$:

(a) Pentru $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} y_{Rst} &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{YR}(s) R(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{H_{R1}(s) H_F(s)}{1 + H_{R1}(s) (H_F(s) - H_m(s))} \frac{1}{s} = 1 \end{aligned} \quad (8.134)$$

(b) Pentru $V(s) = \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned}
 y_{Vst} &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_V(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{YV}(s) R(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - H_{R1}(s) H_m(s)}{1 + H_{R1}(s) (H_F(s) - H_m(s))} \frac{1}{s} = 0
 \end{aligned} \tag{8.135}$$

În aplicațiile practice, funcția de transfer a regulatorului se alege ca fiind inversa părții inversabile a funcției de transfer a modelului:

$$H_{R1}(s) = \frac{1}{H_{m_inv}(s)} \tag{8.136}$$

Ca exemplu poate fi considerat un model de forma:

$$H_m(s) = \frac{K_m (T_3 s - 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}, \quad T_{1,2,3} > 0 \tag{8.137}$$

Se consideră că partea inversabilă a modelului este de forma:

$$H_{m_inv}(s) = \frac{K_m (T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{8.138}$$

În relația (8.138) factorul $(T_4 s + 1)$ a fost introdus la numărătorul părții inversabile a modelului pentru ca funcția de transfer $H_{R1}(s)$ să fie cauzală (gradul mitorului mai mare sau egal cu gradul numărătorului, după inversare, potrivit relației (8.136)). Constanta de timp T_4 introdusă suplimentar de factorul $(T_4 s + 1)$ se alege de 5-10 ori mai mică decât cea mai mică dintre constantele de timp ale modelului. Constanta de timp introdusă de acest factor va constitui un parametru de acord al regulatorului.

Dacă sumatorul din Fig.8.9 în care se face diferența dintre mărimea de ieșire a procesului și mărimea de ieșire a modelului este deplasat pe calea de reacție și trecut prin sumatorul care formează semnalul de eroare se obține o schemă echivalentă a procesului. Această schemă este prezentată în Fig.8.11.

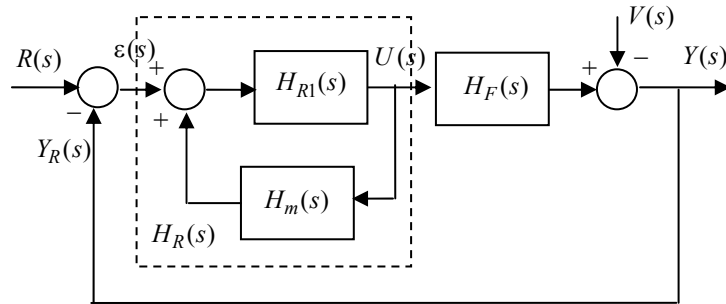


Fig.8.11.

Funcția de transfer a regulatorului va fi:

$$\begin{aligned}
 H_R(s) &= \frac{H_{R1}(s)}{1 - H_{R1}(s)H_m(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H_{R1}(s)} - H_m(s)} = \\
 &= \frac{1}{H_{m_inv}(s) - H_m(s)}
 \end{aligned}
 \tag{8.139}$$

Forma cea mai simplă a regulatorului se obține dacă se consideră că funcția de transfer $H_{R1}(s)$ este de tip proporțional și egală cu inversul factorului de proporționalitate al modelului procesului:

$$H_{R1}(s) = \frac{1}{H_m(0)}
 \tag{8.140}$$

În acest caz, funcția de transfer a regulatorului este de forma:

$$H_R(s) = \frac{1}{H_m(0) - H_m(s)}
 \tag{8.141}$$

Dacă modelul este perfect, potrivit schemei din Fig.8.9, pentru $V(s) = 0$ și o variație treaptă a mărimii de referință, se poate scrie:

$$U(s) = H_{R1}(s)R(s)
 \tag{8.142}$$

Dacă funcția de transfer a regulatorului este de tip P și egală cu inversul factorului de proporționalitate al procesului,

$$H_{R1}(s) = \frac{1}{K_P} \quad (8.143)$$

atunci mărimea de comandă $u(t)$ la variația treaptă a semnalului de referință este:

$$u(t) = \frac{1}{K_P} \cdot 1(t) \quad (8.144)$$

Rezultă o mărime de comandă de tip treaptă de nivel $\frac{1}{K_P}$. Această

observație poate fi utilizată pentru evaluarea modelului procesului. Dacă această mărime de comandă are o formă apropiată de cea din relația (8.144) rezultă că și răspunsul sistemului de reglare la un semnal treaptă unitară va avea o comportare corespunzătoare.

Se consideră că procesul supus controlului este stabil, supraamortizat (fără depășirea valorii de regim staționar), având răspunsul indicial prezentat în Fig.8.12.

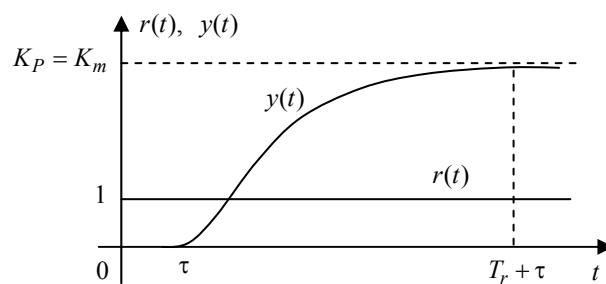


Fig.8.12.

Acest proces este caracterizat de un timp mort τ și un timp de răspuns 2% de valoare $T_r + \tau$. Durata efectivă a regimului tranzitoriu se consideră a fi T_r .

Pentru acest tip de proces se poate considera aceea a unui sistem de ordin doi cu constante de timp egale și timp mort, de forma:

$$H_m(s) = \frac{K_m}{(sT_m + 1)^2} e^{-\tau s} \quad (8.145)$$

Deoarece este de dorit ca răspunsul modelului să coincidă cu răspunsul procesului, parametrii K_m , T_m și τ se determină după răspunsul din Fig.8.12. Constanta de timp a modelului, T_m , se consideră a fi:

$$T_m \cong \frac{T_r}{6} \quad (8.146)$$

Dacă procesul considerat este de fază neminimă (are un zerou în semiplanul complex drept), mărimea de ieșire va evolua la început cu valori negative iar timpul mort τ al modelului va include și această porțiune a răspunsului indicial.

Toate precizările făcute până acum vor fi considerate pentru implementarea unui sistem numeric de reglare cu model intern. Din punct de vedere al utilizării unui model, sistemul numeric este recomandat a fi utilizat deoarece poate implementa foarte ușor funcția de transfer a modelului, sub formă discretă. Pentru a dispune de un parametru de acord suplimentar pentru regulator s-a considerat un factor de amplificare al acestuia, notat K . Implicit, acest factor de amplificare se consideră a avea valoarea $K = 1$. Structura sistemului numeric de reglare cu model intern este prezentată în Fig.8.13.

Funcția de transfer discretă a regulatorului $H_{R1}(s)$ va fi:

$$H_{R1}(z) = \frac{1}{H_m(1)} \quad (8.147)$$

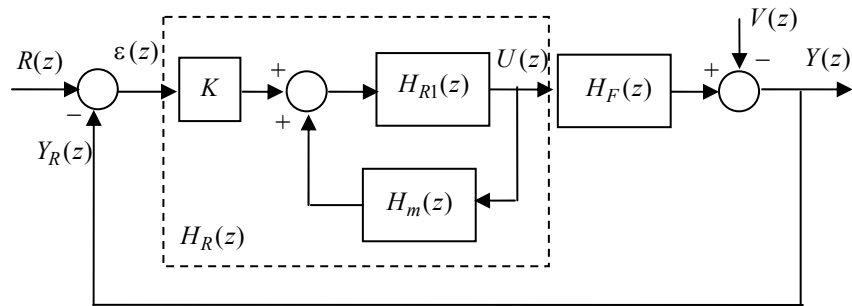


Fig.8.13.

Funcția de transfer a regulatorului discret are expresia:

$$H_R(z) = \frac{K}{H_m(1) - H_m(z)} \quad (8.148)$$

Dacă se consideră modelul dat de relația (8.145), funcția de transfer discretă a acestuia se obține pei relația:

$$H_m(s) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{K_m}{s(sT_m + 1)^2} e^{-\tau s} \right] \quad (8.149)$$

Efectuând calculele se obține pentru modelul discret expresia

$$H_m(z) = K_m \left(\frac{1 - z_0}{z - z_0} - \frac{T}{T_m} \frac{z_0(z - 1)}{(z - z_0)^2} \right) z^{-lm} \quad (8.150)$$

unde $z_0 = e^{-\frac{T}{T_m}}$ iar $lm = \left[\frac{\tau}{T} \right]$ reprezintă partea întreagă a raportului

dintre timpul mort al modelului și perioada de eșantionare.

Un model puțin simplificat față de relația (8.150) care este frecvent utilizat are expresia:

$$H_m(z) = K_m \frac{(1-z_0)^2 z}{(z-z_0)^2} z^{-lm} \quad (8.151)$$

Se poate verifica faptul că modelul dat de relația (8.151) este foarte aproape de cel dat de (8.150) dacă se scrie:

$$z_0 = e^{-\frac{T}{T_m}} \cong 1 - \frac{T}{T_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_m} \right)^2 \quad (8.152)$$

Dacă raportul de polinoame în z care apare în relația (8.151) se înmulțește sus și jos cu z^{-2} rezultă expresia utilizată de regulator a modelului:

$$H_m(z) = K_m \frac{(1-z_0)^2 z^{-1-lm}}{(1-z_0 z^{-1})^2} \quad (8.153)$$

În aceste condiții, funcția de transfer a regulatorului numeric definit de relația (8.148) va fi:

$$\begin{aligned} H_R(z) &= \frac{K}{K_m} \frac{(1-z_0 z^{-1})^2}{(1-z_0 z^{-1})^2 - (1-z_0)^2 z^{-1-lm}} = \\ &= \frac{K}{K_m} \frac{1-2z_0 z^{-1} + z_0^2 z^{-2}}{1-2z_0 z^{-1} + z_0^2 z^{-2} - (1-z_0)^2 z^{-1-lm}} \end{aligned} \quad (8.154)$$

Mărimea de comandă va fi dată de relația:

$$\begin{aligned} u(k) &= 2z_0 u(k-1) - z_0^2 u(k-2) + (1-z_0)^2 u(k-1-lm) + \\ &+ \frac{K}{K_m} (\varepsilon(k) - 2z_0 \varepsilon(k-1) + z_0^2 \varepsilon(k-2)) \end{aligned} \quad (8.155)$$

Dacă procesul nu conține timp mort, atunci nici modelul descris de relația (8.145) nu va conține timp mort și vom avea:

$$H_m(s) = \frac{K_m}{(sT_m + 1)^2} \quad (8.156)$$

Potrivit relației (8.141), funcția de transfer a regulatorului va fi:

$$H_R(s) = \frac{1}{H_m(0) - H_m(s)} = \frac{(sT_m + 1)^2}{K_m T_m s (sT_m + 2)} \quad (8.157)$$

Această funcție de transfer corespunde unui regulator serie PID cu filtrare, de forma:

$$H_R(s) = \frac{1}{2K_m T_m} \left(1 + \frac{1}{sT_m} \right) \frac{(1 + sT_m)}{\left(1 + s\frac{T_m}{2} \right)} \quad (8.158)$$

sau a unui regulator paralel PID cu filtrare numai pe componenta derivativă:

$$H_R(s) = \frac{3}{4K_m T_m} \left(1 + \frac{1}{\frac{3T_m}{2}s} + \frac{\frac{T_m}{6}s}{1 + \frac{T_m}{2}s} \right) \quad (8.159)$$

Se constată că regulatoarele numerice obținute vor fi de tip PID.

Exemplu:

Se consideră sistemul continuu cu funcția de transfer a părții fixate de forma:

$$H_F(s) = \frac{2}{(2s + 1)(5s + 1)(20s + 1)} e^{-6s} \quad (8.160)$$

Raspunsul indicial al procesului este unul supraamortizat și este prezentat în Fig.8.14.

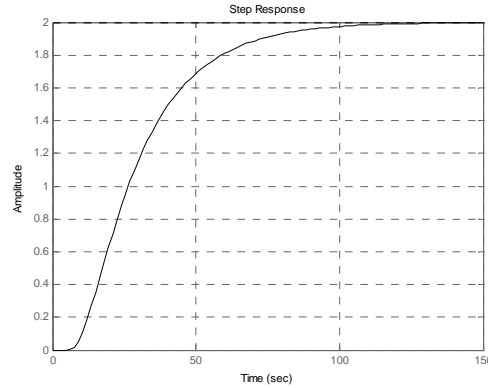


Fig.8.14.

Se constată că timpul de răspuns 2%, incluzând timpul mort, este de aproximativ 101 [s]. Rezultă, potrivit notațiilor din Fig.8.12, $\tau = 6$ [s] și $T_r \cong 95$ [s]. Constanta de timp a modelului, dată de relația (8.146) este $T_m \cong 16$ [s]. Perioada de eșantionare este $T = 2$ [s].

Funcția de transfer discretă a modelului este de forma:

$$H_m(z) = 2 \frac{0.0138z^{-4}}{1 - 1.765z^{-1} + 0.7788z^{-2}} \quad (8.161)$$

deoarece avem $lm = 3$ și $z_0 = 0.8825$.

Funcția de transfer a regulatorului, potrivit relației (8.154), are forma discretă:

$$H_R(z) = \frac{K}{2} \frac{1 - 1.765z^{-1} + 0.7788z^{-2}}{1 - 1.765z^{-1} + 0.7788z^{-2} - 0.0138z^{-4}} \quad (8.162)$$

Factorul de amplificare K este acum un parametru de acordare al regulatorului. Pentru $K = 1.75$ răspunsul indicial al sistemului și mărimea de comandă (discretă) sunt prezentate în Fig.8.15. Se constată, pentru această valoare a factorului de amplificare, un răspuns al sistemului de reglare cu o ușoară depășire a valorii de regim staționar.

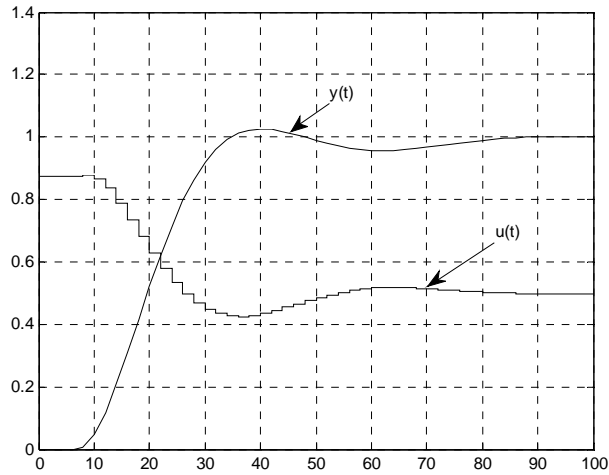


Fig.8.15.

Dacă factorul de amplificare scade (cu doar o zecime) supraeglarea dispare iar la scăderea în continuare a amplificării avem un răspuns supraamortizat. Pentru $K = 2.3$ sistemul de reglare este subamortizat și avem o supraeglare de 20%, așa cum este prezentat în Fig.8.16.

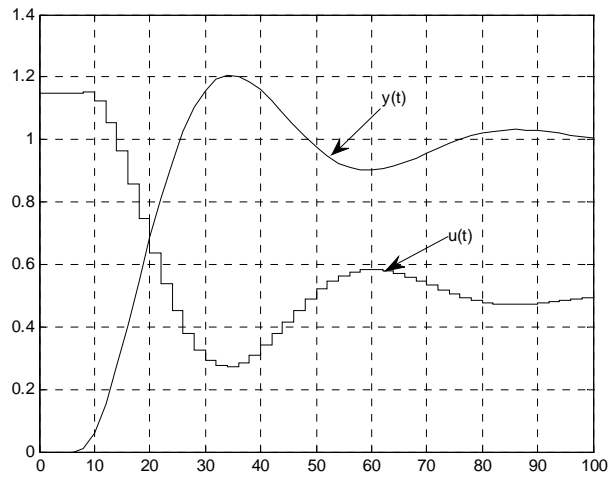


Fig.8.16.

Mărimea de comandă la momentul kT (pentru $K = 2$) are expresia:

$$u(k) = 1.765u(k-1) - 0.7788u(k-2) + 0.0138u(k-4) + \varepsilon(k) - 1.765\varepsilon(k-1) + 0.7788\varepsilon(k-2) \quad (8.163)$$