Cunoscând $y^{(k)}(0_-)$, $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$, din evoluta anterioara a sistemului si $\Delta y^{(k)}{}_0$, solutia determinata din (2.218), se pot afla valorile initiale conventionale $y^{(k)}(0_+)$

2.3.2.4. Raspunsul la impuls al sistemelor monovariabile netede. Proprietati

Se considera ca marimea de intrare a unui sistem monovariabil continuu este distributia Dirac, u(t)= $\delta(t)$, cu imaginea

$$U(s) = L\{\delta(t)\} = 1. \qquad (2.221)$$

Din ecuatia de transfer intrare-iesire pentru transformata Laplace a marimii de iesire se obtine

$$Y(s) = H(s)U(s) = H(s) \bullet 1 = H(s) \qquad (2.222)$$

Din (2.222) rezulta *semnificatia fizica a functiei de transfer,* si anume: **functia de transfer reprezinta transformata Laplace a raspunsului la impuls al sistemului.**

Aplicând transformata Laplace inversa în (2.222) rezulta

$$y(t) = L^{-1}\{H(s) \bullet 1\} = (h \bullet \delta) = \int_0^t h(t-\sigma)\,\delta(\sigma)\,d\sigma = $$
$$= h(t) = L^{-1}\{H(s)\} \qquad (2.223)$$

Definitia 2.1.**Raspunsul la impuls** al unui sistem monovariabil neted, **numit functie sau distributie pondere**, **este originalul *h(t)* corespunzator functiei de transfer *H(s)***

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}. \qquad (2.225)$$

Principalele proprietati ale raspunsului la impuls sunt:

1) **Raspunsul la impuls *h(t)* este nul pentru *t < 0*** deoarece un sistem cauzal pleaca din repaus si conditiile initiale (2.206) la $t = 0_-$ sunt nule.

2) Pentru $t \geq 0$ distributia *h(t)* satisface ecuatia (2.196), care se poate scrie utilizând derivata în sens distributii

$$D^n h(t) + a_{n-1} D^{n-1} h(t) + \ldots + a_1 Dh(t) + a_0 h(t) =$$
$$= b_m D^m \delta(t) + b_{m-1} D^{m-1} \delta(t) + \ldots + b_1 D\delta(t) + b_0 \delta(t). \quad (2.226)$$

Daca în (2.226) se aplica transformata Laplace se obtine o identitate

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) H(s) =$$
$$= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 . \quad (2,227)$$

3) Pentru *t > 0, h(t)* este o functie continua si infinit derivabila, numita functie pondere, care satisface ecuatia diferentiala omogena

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 h^{(1)}(t) + a_0 h(t) = 0 \quad t \geq 0 . \quad (2.228)$$

4) Pentru $m \leq n - 1$, *h(t)* nu contine distributia Dirac si derivatele sale. Valorile initiale ale functiei pondere si ale derivatelor sale se determina utilizând teorema valorii initiale. Se presupune ca $m = n - 1$. *Se obtine*

$$h(0_+) = \lim_{s \to \infty} s H(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{b_{n-1} s^n + b_{n-2} s^{n-1} + \ldots + b_1 s^2 + b_0 s}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = b_{n-1} .$$

(2.229)

$$h^{(1)}(0_+) = \lim_{s \to \infty} s(sH(s) - h(0_+)) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} s \left[\frac{b_{n-1} s^n + b_{n-2} s^{n-1} + \ldots + b_1 s^2 + b_0 s}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} - b_{n-1} \right] =$$

$$= b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-1} = - \begin{vmatrix} b_{n-1} & 1 \\ b_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$h^{(2)}(0_+) = \lim_{s \to \infty} s[s^2 H(s) - sh(0_+) - h^{(1)}(0_+)] =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 \\ b_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ b_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Se continua procedeul si **rezulta pentru derivata de ordinul *(n-1)* urmatoarea expresie**

$$h^{(n-1)}(0_+) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} b_{n-1} & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ b_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_2 & a_3 & a_4 & \ldots 1 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_{n-1} & 1 \\ b_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Cu aceste valori initiale *h(t)* se poate determina pentru $t \geq 0$ *ca solutie a ecuatiei omogene (2.228).*

5) Pentru $m \leq n - 1$, ***h(t) este o functie continua pentru*** $t \geq 0$, care se poate exprima printr-o **suma de exponentiale**. Acestea se pot obtine aplicând transformata Laplace inversa a functiei de transfer $H(s)$

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i} \frac{k_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\lambda_i t} \qquad (2.233)$$

$$k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s - s_i)^{q_i} H(s)\right]\right)_{s=\lambda_i} \qquad \sum_{i=1}^{r} q_i = n. \qquad (2.234)$$

si λ_i, $i = 1, \ldots, r$ sunt radacinile ecuatiei caracteristice fiecare de multiplicitate q_i,

Raspunsul la impuls se poate obtine **experimenta**l cu o buna aproximatie, daca **la intrarea sistemului se aplica un impuls dreptunghiular de amplitudine cât mai mare** (în limite admisibile pentru sistem), de **durata cât mai mica** si de energie suficienta, astfel ca sistemul sa reactioneze printr-un ra-puns la iesire.

Exemplul 2.14. a) Sa se determine raspunsul la impuls al sistemului descris de ecuatia (2.235) si functia de transfer (2.236)

$$2y^{(1)}(t) + y(t) = u(t); \; y(0_-) = 0. \quad (2.235) \qquad H(s) = \frac{1}{2s+1} \quad (2.236)$$

Raspunsul la impuls se calculeaza cu (2.237) si este reprezentat grafic in fig. 2.44 .

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}. \qquad (2.237)$$

Valoarea initiala a raspunsului la impuls este $h(0_+) = b_0 = 0{,}5.$

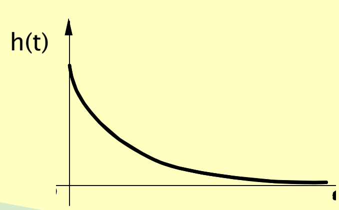

Fig. 2.44

b) Fie un sistem monovariabil descris de ecuatia diferentiala

$$y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=2u(t) \quad y(0_-)=0\,;\, y^{(1)}(0_-)=0\,;\, u(t)=\delta(t). \tag{2.239}$$

Functia de transfer a sistemului este

$$H(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}. \tag{2.240}$$

Se calculeaza raspunsul la impuls si conditiile initiale

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=2e^{-t}-2e^{-2t}. \qquad h(0_+)=0\,;\, h^{(1)}(0_+)=2. \tag{2.241}$$

Graficul raspunsului la impuls *h(t)*, (2.241) este prezentat în fig. 2.45.

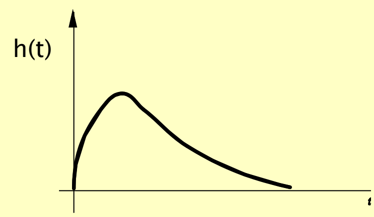

Fig. 2.45

2.3.2.5. Raspunsul indicial al sistemelor dinamice monovariabile netede

Definitia 2.2. **Raspunsul unui sistem** monovariabil liniar neted la un **semnal de intrare treapta unitara, în conditii initiale nule**, se numeste **raspuns indicial sau functie indiciala notata cu *w(t)*.** Pentru

$$u(t)=\sigma(t)\,,U(s)=L\{\sigma(t)\}=\frac{1}{s} \tag{2.242}$$

ecuatia de transfer devine

$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{H(s)}{s}=W(s). \tag{2.243}$$

În domeniul timpului se poate scrie

$$w(t)=(h\bullet\sigma)(t)=\int_0^t h(\tau)\sigma(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t h(\tau)d\tau$$

$$w(t)=L^{-1}\{H(s)\frac{1}{s}\}. \tag{2.244}$$

Din (2.244) rezulta ca **raspunsul indicial se poate defini** ca fiind **functia, sau mai general distributia *w(t)***, **originalul corespunzator expresiei *H(s)/s*.**
Proprietatile principale ale raspunsului indicial sunt similare celor corespunzatoare raspunsului la impuls.

1. Raspunsul indicial $w(t)$ este nul pentru $t < 0$,
2. Pentru $t \geq 0$ distributia $w(t)$ satisface ecuatia

$$\begin{aligned} &D^n w(t) + a_{n-1} D^{n-1} w(t) + \ldots + a_1 Dw(t) + a_0 w(t) = \\ &= b_m D^m \sigma(t) + b_{m-1} D^{m-1} \sigma(t) + \ldots + b_1 D\sigma(t) + b_0 \sigma(t). \end{aligned} \qquad (2.245)$$

Daca în (2.245) se aplica transformata Laplace se obtine o identitate

$$\begin{aligned} &(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) W(s) = \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) \bullet \frac{1}{s}; W(s) = \frac{H(s)}{s}. \end{aligned} \qquad (2.246)$$

3. Pentru $t > 0$, $w(t)$ este o functie continua care satisface ecuatia neomogena

$$w^{(n)}(t) + a_{n-1} w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 w^{(1)}(t) + a_0 w(t) = b_0. \qquad (2.247)$$

4. *Corelatia dintre raspunsul indicial si functia pondere*
Din relatia (2.244) rezulta ca raspunsul indicial al unui sistem este egal cu integrala functiei pondere. Derivând relatia (2.244) în sens distributii se obtine

$$h(t) = D\,w(t) = D(h \bullet \sigma)(t). \qquad H(s) = sW(s) \qquad (2.248)$$

Derivata în sens distributii a raspunsului indicial al unui sistem este egala cu functia pondere a aceluiasi sistem.

5. Pentru $m \leq n$, functia indiciala nu contine distributia Dirac si derivatele ei.
   Valorile initiale la momentul $t = 0_+$ ale functiei indiciale se calculeaza cu teorema valorii initiale.

Pentru $m = n$ se poate stabili relatia

$$w^{(n)}(0_+) = (-1)^n \bullet \begin{vmatrix} b_n & 1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & 1 & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & a_2 & a_3 & \dots 1 & 0 \\ b_1 & a_1 & a_2 & \dots a_{n-1} & 1 \\ b_0 & a_0 & a_1 & \dots a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.255)$$

Pentru $m \leq n$, **functia indiciala** este formata dintr-o suma de exponentiale si functia treapta

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{b_0}{a_0}\sigma(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i}\frac{k_{i'j}}{(q_i - j)!}t^{q_i - j}e^{\lambda_i t}$$

$$k_{i'j} = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-\lambda_i)^{q_i}\frac{H(s)}{s}\right]\right)_{s=\lambda_i} \qquad (2.256)$$

$$t > 0\,;\, i = 1,2,\dots,r\ ;\ j = 1,2,\dots,q_i$$

Componenta permanenta a raspunsului indicial este

$$w_p(t) = \frac{b_0}{a_0} = H(0). \qquad (2.257)$$

Exemplul 2.15. a) Sa se determine raspunsul indicial al sistemului de ordinul *1* descris de functia de transfer (2.236). Aplicând transformata Laplace inversa rezulta

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(2s+1)}\right\} = \qquad (2.258)$$
$$= \sigma(t) - 2e^{-\frac{t}{2}} = (1 - e^{-\frac{t}{2}})\sigma(t)$$

Graficul raspunsului indicial *w(t)*, (2.258) este prezentat în fig. 2.46. Valorile initiale la $t = 0_+$ sunt : $w(0_+) = 0$ si $w^{(1)}(0_+) = 1/2$.

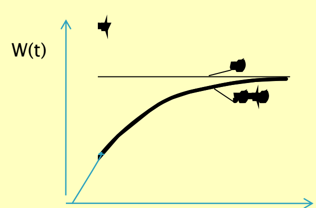

Fig. 2.46

b) Fie sistemul descris de ecuatia diferentiala (2.239). Raspunsul indicial al acestui sistem se determina cu relatia

$$w(t) = L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+3s+2)}\right\} = \qquad (2.259)$$

$$= \sigma(t) - 2e^{-t} + e^{-2t} = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})\,\sigma(t).$$

si este reprezentat grafic în fig. 2.47. Valorile initiale la $t = 0_+$ sunt $w(0_+) = 0$; $w^{(1)}(0_+) = 0$; $w^{(2)}(0_+) = 2$.

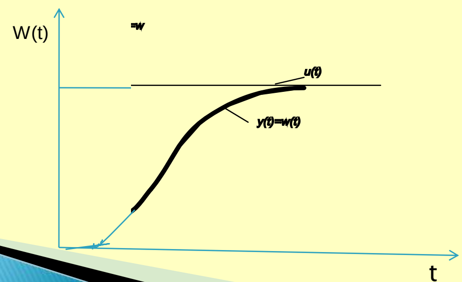

Fig.2.47

2.3.3. Raspunsurile temporale ale sistemelor monovariabile discrete

- Raspunsul unui sistem monovariabil discret este solutia *y(k)* a ecuatiei cu diferente (2.185) pentru un sir al valorilor marimii de intrare *u(k)* dat si pentru conditii initiale date.
- Daca se stie sirul *u(k)* rezulta ca si sirul *g(k) este cunoscut*

$$g(k) = b_m u(k+m) + \ldots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

Se analizeaza ecuatiile cu diferente de forma

$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = g(k)$$

$$y(k+n) = -[a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k)] + g(k).$$

Pe baza acestei relatii se pot determina direct toate valorile lui *y(k), k > 0*, daca se cunosc *g(k)* si conditiile initiale *y(0), y(1), ..., y(n - 1)*.

solutia generala a ecuatiei (2.261) se poate pune sub forma

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k) \qquad (2.263)$$

***$y_l(k)$* este componenta libera a sirului solutie**, adica solutia generala a ecuatiei omogene cu diferente

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + ... + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0. \qquad (2.264)$$

***$y_f(k)$* este componenta fortata,** respectiv o solutie particulara a ecutiei neomogene cu diferente (2.261).

Ecuatia caracteristica asociata ecuatiei cu diferente este

$$P(\gamma) = \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + ... + a_1\gamma + a_0 = 0 \qquad (2.265)$$

Si poate avea solutii reale γ_i sau complexe $\gamma_{i,i+1} = \alpha_i + \beta_i,(j = \sqrt{-1}, \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{R})$ distincte sau multiple.

Componenta libera *$y_l(k)$* este o **combinatie liniara** a unui set de ***n* solutii liniar independente ale ecuatiei** omogene, care sunt de forma

$$y_i(k) = \gamma_i^k. \qquad (2.266)$$

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_i^k \qquad (2.267)$$

unde C_i sunt constante de integrare

În cazul în care **marimea de intrare este impulsul unitar** discret $\delta(k)$, raspunsul sistemului se numeste ***secventa de ponderare*** si se noteaza cu *$h(k)$* si are o expresie identica cu relatia (2.267)

$$h(k) = 0 \quad pentru \;\; k < 0$$

$$h(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_i^k \quad pentru \;\; k \ge 0. \qquad (2.271)$$

Componenta fortata $y_f(k)$ a raspunsului unui sistem liniar monovariabil discret se poate determina atunci cu ajutorul ***produsului de convolutie discret*** **dintre secventa de ponderare si marimea de intrare $u(k)$**, definit de relatia

$$y_f(k) = (h \bullet u)(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i). \qquad (2.272)$$

Înlocuind $y_l(k)$ din (2.267) si $y_f(k)$ din (2.272) în relatia (2.263) se obtine solutia generala a ecuatiei cu diferente (2.185), pentru orice marime de intrare $u(k)$

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_i^k + \sum_{i=0}^{k-1} h(k-i)u(i). \qquad (2.273)$$

Constantele C_i se determina din satisfacerea conditiilor initiale.

Exemplul 2.16. Fie un sistem discret descris de ecuatia si fie $u(k) = \delta(k)$.

$$y(k+2) - 0.9y(k+1) + 0.2y(k) = u(k) \qquad (2.274)$$

Ecuatia caracteristica asociata ecuatiei (2.274) este $\gamma^2 - 0.9\gamma + 0.2 = 0$, si are radacinile: γ_i = 0,5, γ_i = 0,4.

Solutia ecuatiei (2.274) va fi

$$y(k) = C_1(0,5)^k + C_2(0,4)^k, \ k \geq 1. \qquad (2.275)$$

In ipoteza $y(k) = 0$ pentru $k \leq 0$, din ecuatia cu diferente (2.274) , valabila oricare ar fi $k \in \boldsymbol{Z}$, se obtine:

pentru $k = -2 \rightarrow y(0) - 0,9y(-1) + 0,2y(-2) = 0 \rightarrow y(0) = 0,$
pentru $k = -1 \rightarrow y(1) - 0,9y(0) + 0,2y(-1) = 0 \rightarrow y(1) = 0,$
pentru $k = 0 \rightarrow y(2) - 0,9y(1) + 0,2y(0) = 1 \rightarrow y(2) = 1.$

Constantele C_1 si C_2 se determina folosind valorile $y(1)$ si $y(2)$.

Se rezolva sistemul de ecuatii

$$0,5C_1 + 0,4C_2 = 0$$
$$(0,5)^2 C_1 + (0,4)^2 C_2 = 1 .$$

Se obtine $C_1 = 20$; $C_2 = -25$. Secventa de ponderare a sistemului este

$$h(k) = \begin{cases} 0 \text{ , pentru } k = 0 \\ 20(0,5)^k - 25(0,4)^k \text{ , pentru } k \geq 1 . \end{cases} \quad (2.276)$$

2.3.2.2. Utilizarea transformatelor Z pentru calculul raspunsurilor temporale ale sistemelor discrete

Fie un sistem monovariabil discret descris de ecuatia

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + ... + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ & = b_n u(k+n) + ... + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \\ & y(-1), y(-2), ..., y(-n), u(-1), .., u(-n) \text{ - date} . \end{aligned} \quad (2.277)$$

În ecuatia (2.277) se efectueaza un decalaj la dreapta (întârziere) cu n pasi si se obtine

$$\begin{aligned} & y(k) + a_{n-1} y(k-1) + ... a_1 y[k-(n-1)] + a_0 y(k-n) = \\ & = b_n u(k) + ... + b_1 u[k-(n-1)] + b_0 u(k-n) . \end{aligned} \quad (2.278)$$

Se aplica în (2.278) transformata Z stiind ca

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}[F(z) + zf(-1)].$$

$$\begin{aligned} & Y(z) + a_{n-1} z^{-1} [Y(z) + zy(-1)] + ... + a_0 z^{-n} [Y(z) + zy(-1) + \\ & + ... + z^n y(-n)] = b_n U(z) + b_{n-1} z^{-1} [U(z) + zu(-1)] + ... \\ & + b_0 z^{-n} [U(z) + zu(-1) + ... + z^n u(-n)] . \end{aligned} \quad (2.280)$$

Relatia (2.280) se poate aduce la forma

$$\begin{aligned} Y(z) = & \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} U(z) + \\ & + \frac{F[z, y(-1), ..., y(-n), u(-1), ... u(-n)]}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} . \end{aligned} \quad (2.281)$$