În ecuatia (2.277) se efectueaza un decalaj la dreapta (întârziere) cu *n* pasi si se obtine

$$\begin{aligned} &y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots a_1\, y[k-(n-1)] + a_0\, y(k-n) = \\ &= b_n\, u(k) + \ldots + b_1\, u[k-(n-1)] + b_0\, u(k-n). \end{aligned} \tag{2.278}$$

Se aplica în (2.278) transformata *Z* stiind ca

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}[F(z) + zf(-1)].$$

$$\begin{aligned} &Y(z) + a_{n-1} z^{-1} [Y(z) + zy(-1)] + \ldots + a_0 z^{-n} [Y(z) + zy(-1) + \\ &+ \ldots + z^n y(-n)] = b_n U(z) + b_{n-1} z^{-1} [U(z) + zu(-1)] + \ldots \\ &+ b_0 z^{-n} [U(z) + zu(-1) + \ldots + z^n u(-n)]. \end{aligned} \tag{2.280}$$

Relatia (2.280) se poate aduce la forma

$$\begin{aligned} Y(z) = &\frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} U(z) + \\ &+ \frac{F[z, y(-1), \ldots, y(-n), u(-1), \ldots u(-n)]}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}. \end{aligned} \tag{2.281}$$

Daca **sistemul pleaca din repaus**, **conditiile initiale sunt nule** *y(-1)=... = y(-n) = 0; u(-1) = ... = u(-n) = 0,* si al doilea termen din membrul drept din (2.281) se anuleaza. Primul termen reprezinta produsul dintre functia de transfer *H(z)* si imaginea marimii de intrare *U(z)*. Relatia (2.281) se reduce la forma

$$Y(z) = H(z)U(z). \tag{2.281}$$

Aplicând transformata *Z* inversa în relatia (2.281') se obtine *y(k)*, solutie a ecuatiei cu diferente (2.277), pentru conditii initiale nule

$$y(k) = Z^{-1}\{Y(z)\} = Z^{-1}\{H(z)U(z)\} = \sum_{i=1}^{k-1} h(k-i)u(i). \tag{2.282}$$

Exemplul 2.17. Fie sistemul discret descris de ecuatia

$$\begin{aligned} y(k+2) - 0{,}9y(k+1) + 0{,}2y(k) = u(k) \\ y(-1) = 0\ ;\ y(-2) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.284}$$

Sa se determine marimea de iesire *y(k)* considerând ca $u(k)=\delta(k)$.

În ecuatia (2.284) se efectueaza un decalaj la dreapta cu 2 pasi si se aplica transformata *Z*

$$y(k)-0{,}9y(k-1)+0{,}2y(k-2)=u(k-2).$$

$$Y(z)-0{,}9z^{-1}[Y(z)+zy(-1)]+0{,}2z^{-2}[Y(z)+zy(-1)+ \qquad (2.286)$$

$$+z^{2}y(-2)]=z^{-2}[U(z)+zu(-1)+z^{2}u(-2);U(z)=1.$$

Pentru *y(-1) = y(-2) = 0, u(-1) = u(-2) = 0* rezulta

$$Y(z)=\frac{1}{z^{2}-0{,}9z+0{,}2}.$$

Se descompune în fractii simple *Y(z)/z*

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{5}{z}+\frac{20}{z-0{,}5}-\frac{25}{z-0{,}4}. \quad \text{si} \quad Y(z)=5+\frac{20z}{z-0{,}5}-\frac{25z}{z-0{,}4}. \qquad (2.289)$$

Aplicând transformata *Z* inversa în (2.289) rezulta

$$y(k)=Z^{-1}\{\,Y(z)\,\}=5\delta(k)+20\,(0{,}5\,)^{k}-25\,(0{,}4\,)^{k}. \qquad (2.290)$$

Din (2.290) pentru $k = 0$ rezulta $y(0) = 0$, iar pentru $k \geq 1$, $\delta(k)= 0$ si *y(k)* coincide cu *h(k)* din (2.62).

2.3.3.3. Raspunsul la impuls al sistemelor monovariabile discrete

Definitia 2.3. **Raspunsul cauzal** al unui **sistem liniar monovariabil discret,** invariant în timp, **la impulsul unitar discret *δ(k)*** este denumit ***raspuns la impuls sau secventa de ponderare*.**

Un sistem monovariabil discret, de ordin oarecare, este descris de ecuatia

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+...+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)=$$
$$=b_m u(k+m)+...+b_1 u(k+1)+b_0 u(k)$$
$$y(0)=y(1)=...=y(n-1)=0\,;u(0)=u(1)=...=u(m-1)=0 \quad (2.306)$$

respectiv de functia de transfer discreta

$$H(z)=\frac{b_m z^m+...+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0}=\frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (2.307)$$

Daca la intrarea sistemului se aplica un impuls unitar discret

$$u(k)=\delta(k)=\begin{cases}1 & ,\ k=0\\ 0 & ,\ k\neq 0\end{cases}\ ;\ Z\{u(k)\}=1 \quad (2.308)$$

Din ecuatia de transfer intrare-iesire, aplicand transformata Z inversa rezulta

$$Y(z)=H(z)U(z)=H(z). \quad (2.309)$$

$$y(k)=Z^{-1}\{H(z)\}=h(k) \quad (2.310)$$

Rezulta din (2.309) si (2.310) ca **functia de transfer discreta *H(z)* reprezinta transformata *Z* a raspunsului la impuls** al unui sistem liniar monovariabil discret. Pentru o intrare oarecare *u(k)* din (2.307) rezulta, aplicând transformata *Z* inversa

$$y(k)=Z^{-1}\{Y(z)\}=Z^{-1}\{H(z)U(z)\}=(h\bullet u)(k)=\sum_{j=0}^{k-1}h(k-j)u(j). \quad (2.311)$$

Raspunsul unui sistem discret care pleaca din conditii initiale nule este dat de **produsul de convolutie al marimii de intrare *u(k)* cu secventa de ponderare,** (raspunsul la impuls) ***h(k).***

Exemplul 2.18. Fie sistemul monovariabil discret descris de ecuatia

$$y(k+1)-3y(k)=u(k)\ ;\ y(0)\neq 0. \quad (2.312)$$

Sa se determine raspunsul la impuls si rapunsul sistemului pentru

$$u(k)=2^k \ \ pentru \ \ k\geq 0\,;\, y(0)=y_0\neq 0\,. \qquad (2.313)$$

Aplicând transformata *Z* în ecuatia (2.312), tinând seama de (2.313) se obtine

$$z[Y(z)-y(0)]-3Y(z)=U(z)\,;U(z)=Z\left\{2^k\right\}=\frac{z}{z-2}\,;$$
$$Y(z)=\frac{1}{z-3}U(z)+\frac{zy(0)}{z-3}=H(z)U(z)+\frac{zy(0)}{z-3}\,;H(z)=\frac{1}{z-3}\,. \qquad (2.315)$$

Aplicând transformata *Z* inversa, dupa descompunerea în fractii simple a expresiilor H(z)/z, *Y(z)/z*, se obtine pentru h(k) si *y(k)*

$$h(k)=Z^{-1}\{H(z)\}=Z^{-1}\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-3}\right\}=-\frac{1}{3}\delta(k)+\frac{1}{3}3^k$$

$$h(k=\begin{cases}3^{k-1} & \text{pentru } k\geq 1\\ 0 & \text{pentru } k\prec 1\end{cases}$$

$$y(k)=Z^{-1}\{Y(z)\}=Z^{-1}\left\{-\frac{z}{z-2}+\frac{z}{z-3}+\frac{zy(0)}{z-3}\right\}=$$
$$=(3^k-2^k)+y(0)3^k=\sum_{j=1}^{k-1}3^{k-1-j}2^j+y(0)3^k=\sum_{j=1}^{k-1}h(k-j)u(j)+y(0)3^k \qquad (2.316)$$

Primul termen din (2.316) reprezinta componenta fortata a raspunsului determinata de marimea de intrare *u(k)*. Al doilea termen reprezinta influenta conditiilor initiale asupra raspunsului sistemului.

2.3.3.4. Raspunsul indicial al sistemelor dinamice discrete

Definitia 2.4. **Raspunsul unui sistem dinamic** liniar **monovariabil discret** la un **semnal de intrare treapta unitara discreta *σ(k)*,** în **conditii initiale nule,** se numeste ***raspuns inidicial discret*** sau *functie indiciala discreta*, notata cu *w(k)*.

$$u(k) = \sigma(k)\,; U(z) = Z\{\sigma(k)\} = \frac{z}{z-1} \qquad (2.317)$$

Ecuatia de transfer devine

$$Y(z) = H(z)U(z) = H(z)\frac{z}{z-1} = W(z)\,. \qquad (2.318)$$

În domeniul timpului se poate scrie

$$w(k) = (h \bullet \sigma)(k) = \sum_{j=0}^{k-1} h(k-j)\sigma(j) = \sum_{j-0}^{k-1} h(k-j) \qquad w(k) = Z^{-1}\left\{ H(z)\frac{z}{z-1} \right\}. \qquad (2.320)$$

Exemplul 2.19. Fie sistemul discret descris de functia de transfer în *z*

$$H(z) = \frac{0{,}632\,z}{z^2 - 0{,}736\,z + 0{,}368} \qquad (2.321)$$

Se aplica la intrare un semnal treapta unitara discreta, definit de (2.317). Raspunsul indicial al sistemului se obtine aplicând transformata *Z* inversa functiei

$$Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1} = \frac{0{,}632\,z^2}{(z-1)(z^2 - 0{,}736\,z + 0{,}368)} = W(z)\,. \qquad (2.322)$$

Utilizând metoda împartirii infinite relatia (2.322) este dezvoltata în serie de puteri dupa z^{-1}

$$W(z) = 0{,}632\,z^{-1} + 1{,}096\,z^{-2} + 1{,}205\,z^{-3} + 1{,}12\,z^{-4} + 1{,}014\,z^{-5} + 0{,}98\,z^{-6}$$

$$w(k) = Z^{-1}\{W(z)\} = 0{,}632\,\delta(k-1) + 1{,}096\,\delta(k-2) + 1{,}205\,\delta(k-3) + $$
$$+ 1{,}12\,\delta(k-4) + 1{,}014\,\delta(k-5) + 0{,}98\,\delta(k-6)$$

În fig. 2.48 este prezentat raspunsul indicial al sistemului discret (2.321)

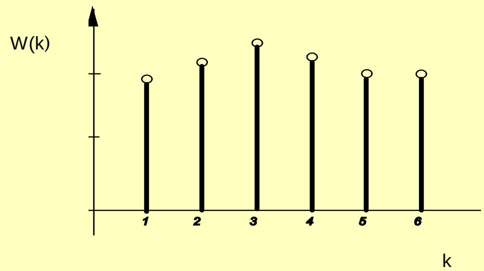

Fig. 2.48

2.4. Raspunsul la frecventa al sistemelor dinamice liniare monovariabile.

2.4.1. Aplicarea transformatei Fourier în studiul sistemelor dinamice

Orice **functie periodica care satisface conditiile**: a) este univoca pe perioada T, b) are un numar finit de maxime si minime si un numar finit de discontinuitati de prima speta c) închide o suprafata finita, poate fi descompusa într-o **serie infinita de functii armonice conform relatiei**

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin k\,\omega_0 t+\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\,\omega_0 t=$$
$$=b_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\,\omega_0 t+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\,\omega_0 t\;;\;\omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad (2.324)$$

$$b_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt\;;\quad a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\,\omega_0 t\,dt;\quad b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\,\omega_0 t\,dt\,. \qquad (2.325)$$

În care ω_0, T si b_0 sunt respectiv: pulsatia, perioada si valoarea medie a functiei periodice $f(t)$.

Relatia (2.324) se poate aduce la forma

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\;;\;c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt\,. \qquad (2.328)$$

Expresia (2.328) se numeste ***seria complexa Fourier*** *a* ***functiei f(t); c_k*** este un **coeficient complex** numit ***amplitudinea complexa a armonicii k***; $e^{jk\omega 0\,t}$ este numita ***armonica de ordin k***.

Pentru o functie *f(t)* continua se defineste **transformata Fourier *F(jω)* cu relatia**

$$F(j\omega)=F\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\,. \qquad (2.338)$$

Cu **transformata Fourier inversa** se poate deternina **originalul *f(t)*** cand se stie functia imagine *F(jω)*

$$f(t)=F^{-1}\{F(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\,. \qquad (2.239)$$

Transformata Fourier F(jω) a functiei f(t) se numeste ***spectru frecvential* al acestei functii**, iar relatia (2.339) se numeste ***integrala Fourier*** sau *transformata Fourier inversa.*

Admit **transformata Fourier numai functiile *f(t)* (cu valori** reale, mai rar complexe) de variabila reala *t* care satisfac conditiile lui Dirichlet :

1) f(t) este « integrabila » , sau $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$
2) *f(t)* are un numar finit de discontinuitati de prima speta pe orice interval finit;
3) *f(t)* are un numar finit de maxime si minime pe orice interval de timp finit.

Exemplul 2.21. Se considera un impuls centrat reprezentat în fig. 2.51.*a* definit de relatia

$$f(t)=\begin{cases} A & t\in\left(-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right) \\ 0 & in\,rest \end{cases} \qquad (2.342)$$

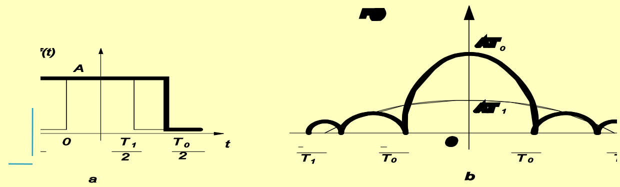

Fig.2.51

Transformata Fourier a acestui impuls este

$$F(j\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\, e^{-j\omega t}\, dt =$$
$$= -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = AT_0 \frac{\sin u}{u}\,;\, u = \frac{\omega T_0}{2}\,. \qquad (2.343)$$

Spectrul de frecvente $|F(j\omega)|$ este reprezentat în fig.2.51.*b* cu linie continua. Un impuls mai „îngust" de durata $T_1 < T_0$ are o transformata mai „larga", reprezentat cu linie întrerupta în fig. 2.51.*b*.

Transformata Fourier *F{[f]}* a unei distributii [*f*] este definita prin

$$< F\{ [\, f\,] \}, \varphi(\omega) > = < [\, f\,], F\{\varphi(t)\} > \qquad (2.344)$$

unde *φ(t)* este o functie descrescatoare la infinit.

a) Pentru distributia Dirac se obtine

$$F\{\, \delta(t)\, \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1\,. \qquad (2.345)$$

Relatia (2.345) este reprezentata grafic în fig. 2.52.

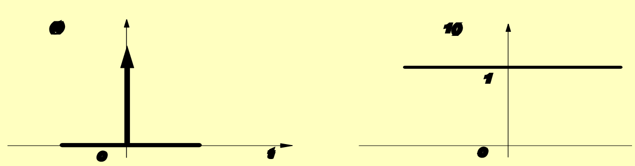

Fig. 2.52

b) Transformata constantei *1*.

Fie *1(t)* = *1* oricare ar fi *t*. Din proprietatea de dualitate a transformatei Fourier rezulta

$$F\{\ 1(t)\ \} = 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega). \qquad (2.347)$$

În sens distributii se da un sens integralei $\int_{-\infty}^{\infty} 1\,e^{-j\omega t}\,dt\ ;$

ea este egala cu *2πδ(ω).*

c) Transformata Fourier a functiei exponentiale $e^{\pm j\omega 0t}$

$$F\left\{e^{\pm j\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega_0 t}\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\,e^{-j(\omega \pm \omega_0)t}\,dt =$$
$$= 2\pi\delta(\omega \pm \omega_0) \qquad (2.348)$$

d) **Transformata Fourier a derivatei**.
Fie un semnal *f(t)*, considerat ca o distributie, si derivata lui *Df(t)*

Transformata Fourier a derivatei este egala cu **transformata Fourier a functiei multiplicata cu *jω*** .

$$F\{\ \dot{f}(t)\ \} = F\{\ Df(t)\ \} = j\omega\,F\{\ f(t)\ \}. \qquad (2.354)$$

În general, pentru derivata de ordin *k* *unei distributii* *[f]*

$$F\{\ D^k[\ f\ ]\ \} = (j\omega)^k\,F\{\ [f]\ \}. \qquad (2.355)$$

$$F\{\ D^k\,\delta(t)\} = (j\omega)^k\ ;\ F\{\ D^k\,\delta(t-\tau)\ \} =$$
$$= (j\omega)^k\,F\{\ \delta(t-\tau)\ \} = (j\omega)^k\,e^{-j\omega\tau} \qquad (2.356)$$

e) Transformatele Fourier ale pseudofunctiei *1/t* *si ale functiei sgn(t)*

$$F\left\{\frac{1}{t}\right\} = -\pi j\, sgn(\omega). \qquad (2.357)$$

$$F\{sgn(t)\} = -\frac{2}{j\omega} \qquad (2.358)$$

f) Transformata Fourier a treptei unitare *σ(t)*.

Functia treapta unitara se poate exprima cu ajutorul functiei *sgn(t)* sub forma

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t) \qquad (2.359)$$

Aplicând transformata Fourier în (2.359) se obtine

$$F\{\sigma(t)\} = \pi\, \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \qquad (2.360)$$

În cazul **sistemelor cu esantionare** prin esantionarea unui **semnal continuu** cu o perioada de esantionare *T* , se obtine un **sir (o serie) de impulsuri continue**

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, \delta(t-kT). \qquad (2.361)$$

Fie *F(jω)* transformata Fourier a semnalului continuu

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (2.362)$$

Se presupune ca **semnalul continuu nu contine frecvente mai ridicate ca $\omega_c = 2\pi f_c$**, astfel ca *F(jω) = 0*, pentru $|\omega| > \omega_c$. Densitatea de amplitudine (spectrul de frecventa) $|F(j\omega)|$ va fi de forma din figura 2. 53.*a*.

Transformata Fourier a sirului de impulsuri (2.361) este data de relatia

$$F^*(j\omega) = F\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, e^{-jk\omega T}. \qquad (2.363)$$

Densitatea de amplitudine $|F^*(j\omega)|$ este în aceste conditii o functie periodica (fig. 2.53.*b*), care reproduce spectrul $|F(j\omega)|$ în benzile de frecvente

$$(n-\frac{1}{2})\,\omega_T \le \omega \le (n+\frac{1}{2})\,\omega_T\;,n\in Z. \qquad (2.364)$$

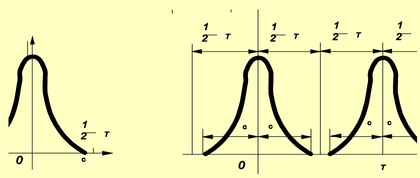

Fig. 2.53

Într-adevar pentru $\omega_1 = \omega + n\omega_T$, $(\forall)\ n \in \boldsymbol{Z}$, din (2.363) se obtine

$$F^*(j\,\omega_1)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,e^{-jkT(\omega+n\omega_T)}=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,e^{-jk\omega T}\,e^{-jkT\frac{2\pi n}{T}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,e^{-jk\omega T}=F^*(j\omega).$$

Daca
$$\omega_c \le \frac{\omega_T}{2}\;,T\le\frac{\pi}{\omega_c} \qquad (2.365)$$

rezulta ca spectrul $|F(j\omega)|$ se regaseste reprodus, de o infinitate de ori, nedeformat, în spectrul $|F^*(j\omega)|$. Conditia (2.365) este stabilita de teorema lui Shannon care se enunta astfel

Teorema 2.1. (teorema esantionarii - Shannon)

Daca **un semnal *f(t)* nu contine frecvente mai ridicate ca $\boldsymbol{\omega_c = 2\pi f_c}$,** atunci acesta este **complet caracterizat** de **valorile sale masurate periodic cu o perioada *T*** data de relatia (2.365). Atunci **când conditia (2.365) nu este respectata,** în spectrul $|F^*(j\omega)|$ nu se mai regaseste decât partial $F(j\omega)$, fig. 2.54, iar semnalul $f^*(t)$ va contine erori importante numite erori de esantionare.

În practica **frecventa de esantionare se alege de (10 - 100)** ori **mai mare** decât **frecventa de taiere a sistemului**

2.4.2. Raspunsul la frecventa al sistemelor dinamice liniare monovariabile netede

2.4.2.1. Raspunsul la frecventa. Definitii.

Pe baza transformatei Fourier s-a dezvoltat **metoda operationala** de studiu a sistemelor dinamice liniare mono-variabile si invariante în timp **denumita *metoda frecventiala.***

Definitia 2.5. **Raspunsul la frecventa al unui sistem dinamic** monovariabil este **raspunsul fortat al acestuia** determinat de un **semnal de intrare armonic (sinusoidal**).

Se considera un sistem monovariabil liniar neted descris de ecuatia

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{n-1}u^{(m-1)}(t)+\dots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t) \qquad (2.366)$$

Se noteaza transformatele Fourier ale lui *y(t)* si *u(t)*

$$Y(j\omega)=F\{y(t)\};U(j\omega)=F\{u(t)\} \qquad (2.367)$$

Tinând seama de proprietatile transformatei Fourier din relatia (2.366) se obtine

$$Y(j\omega)[(j\omega)^{(n)}+a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)}+\dots+a_1\,j\omega+a_0]=$$
$$=U(j\omega)[b_m(j\omega)^{(m)}+b_{m-1}(j\omega)^{(m-1)}+\dots b_1\,j\omega+b_0]. \qquad (2.369)$$

$$Y(j\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}\dots+b_1\,j\omega+b_0}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\dots+a_1\,j\omega+a_0}U(j\omega) \qquad (2.370)$$

Se noteaza cu *H(jω)* raportul

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}\ldots+b_1 j\omega+b_0}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1 j\omega+a_0}. \qquad (2.371)$$

Functia complexa *H(jω)* se poate obtine direct din **functia de transfer a sistemului, *H(s)*,** înlocuind ***s = jω***

$$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}. \qquad (2.372)$$

Ecuatia (2.370) se poate scrie sub forma

$$Y(j\omega)=H(j\omega)U(j\omega). \qquad (2.373)$$

Revenind în domeniul timpului, conform teoremei produsului de convolutie, se obtine

$$y(t)=(h\bullet u)(t)=\int_0^{\infty} h(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma=\int_{-\infty}^{t} h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma \qquad (2.374)$$

$$h(t)=F^{-1}\{H(j\omega)\}. \qquad (2.375)$$

h(t) este raspunsul la impuls al sistemului monovariabil.

Definitia 2.6. **Functia complexa *H(jω)* se numeste raspunsul la frecveta** al unui sistem dinamic monovariabil si **se defineste ca transformata Fourier a raspunsului la impuls** al acestuia

$$H(j\omega)=F\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$h(t)=0 \quad pentru \quad t<0. \qquad (2.376)$$

Rezulta din (2.376) o **interpretare fizica a transformatei Fourier: transformata *H(jω)* este o imagine frecventiala (spectrala) a originalului *h(t)*.**

Deoarece *H(s)* este o functie reala, datorita proprietatii de reflexie (relatia (2.61)), rezulta ca

$$H(-j\omega)=\overline{H(j\omega)} \qquad (2.377)$$

si deci $$H(\pm j\omega)=H_R(\omega)\pm jH_I(\omega) \quad (2.377)$$

unde $H_R(\omega) = Re(H(j\omega))$ este partea reala si $H_I(\omega) = Im(H(j\omega))$ este partea imaginara a functiei $H(j\omega)$.

Pentru functia complexa $H(j\omega)$ se definesc modulul $M(\omega)$ si argumentul $\varphi(\omega)$

$$M(\omega)=|H(j\omega)|=\sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=arg\,H(j\omega)=\mathrm{arctg}\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \quad (2.378)$$

Raspunsul la frecventa *H(jω)* caracterizeaza complet **raspunsul fortat al** unui sistem monovariabil pentru o **marime de intrare sinusoidala.**

Pentru marimea de intrare sinusoidala de forma

$$u(t)=U_m\sin\omega_0 t \;,\; t>0 \quad \text{se asociaza} \quad u_c(t)=U_m e^{j\omega_0 t} \quad (2.381)$$

Marimea de iesire complexa se calculeaza cu produsul de convolutie (2.374) si se obtine:

$$\begin{aligned} y_c(t)&=(h\bullet u_c)(t)=\int_0^\infty h(\sigma)U_m e^{j\omega_0(t-\sigma)}d\sigma=U_m e^{j\omega_0 t}\int_0^\infty h(\sigma)e^{-j\omega_0\sigma}d\sigma=\\ &=U_m e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)=U_m e^{j\omega_0 t}|H(j\omega_0)|e^{j\,arg(H(j\omega_0))}=\\ &=U_m M(\omega_0)e^{j(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))}=Y_m e^{j(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))} \end{aligned} \quad (2.382)$$

Marimea de iesire în regim fortat (permanent) este

$$\begin{aligned} y(t)&=y_f(t)=U_m H(\omega_0)\sin(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))=\\ &=U_m|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+arg(H(j\omega_0)))=Y_m\sin(\omega_0 t+\varphi(\omega_0)). \end{aligned} \quad (2.383)$$

Rezulta ca **raspunsul fortat al sistemului** este tot o **oscilatie sinusoidala**, de **aceeasi pulsatie ω_0** ca si **marimea de intrare**, dar de **amplitudine si faza diferite** de cele ale marimii de intrare. Din (2.382) si (2.383) se obtine

$$\frac{Y_m}{U_m} = M(\omega_0) = |H(\omega_0)|\,;\ \varphi(\omega_0) = arg\ H(j\omega_0) \qquad (2.384)$$

Deci **modulul raspunsului la frecventa** este egal cu raportul dintre amplitudinea oscilatiei de la iesire si amplitudinea oscilatiei de la intrare, iar **argumentul** sau este egal **cu faza oscilatiei de la iesire.**

Pe baza **raspunsului la frecventa s-a dezvoltat metoda** de analiza si sinteza a sistemelor dinamice, denumita ***metoda frecventiala.***

2.4.2.2. Reprezentari grafice ale raspunsului la frecventa ale sistemelor monovariabile netede

Raspunsul la frecventa *H(jω)* este o functie complexa de variabila reala *ω*. Se utilizeaza reprezentarile grafice: