Rezulta ca **polul în origine introduce un defazaj egal cu - *απ/2*** pentru tot domeniul de pulsatii.

Indici de performanta ai sistemelor dinamice

Se considera o forma tipica a raspunsului indicial *y(t) = w(t)* prezentata în fig. 2.67.

Valoarea stationara a marimii de iesire este notata $y_s = w_s = H_R(0)$.

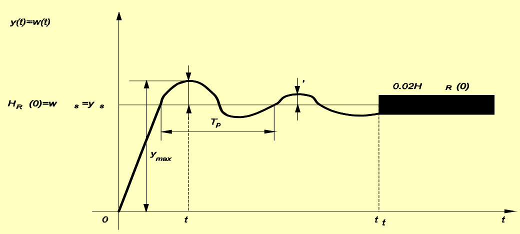

Fig. 2.67

Raspunsul indicial poate fi caracterizat sintetic printr-o serie de parametri care constituie *indici de performanta* ai sistemelor dinamice.

a) *suprareglarea* sau *supraurmarirea*, definite prin

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_s}{y_s} \quad , \; sau \; in \; procente \qquad (2.456)$$

precum si momentul t_σ pentru care $y(t_\sigma) = y_{max}$.

b) *indicele de oscilatie ψ* definit prin **variatia relativa a amplitudinilor a doua depasiri succesive** de acelasi semn a valorii de regim stationar

$$\Psi = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} = 1 - \frac{\sigma'}{\sigma} = 1 - \lambda \qquad (2.457)$$

c) *durata regimului tranzitoriu t_t*, reprezinta timpul masurat de la începutul procesului tranzitoriu si pâna în momentul în care **valoarea absoluta a diferentei** dintre marimea de iesire *y(t)* si valoarea sa stationara y_s **scade sub o anumita limita fixata**, fara sa mai depaseasca ulterior aceasta limita;

$$\left|y(t)\text{-}y_s\right| < \Delta,\ \Delta = 0{,}05 y_s \ sau\ \Delta = 0{,}02 y_s.,\ \forall\, t < t_s \qquad (2.458)$$

d) ***perioada oscilatiilor proprii T_p*** **-** definita (aproximativ) ca în fig. 2.67, daca raspunsul este oscilant amortizat;

e) ***numarul de oscilatii N***, daca raspunsul traverseaza de un numar finit de ori componenta stationara y_s.

Valoarea estimativă a duratei t_t este

$$t_t = (8 \div 10) / w_0 . \qquad (2.462)$$

Durata regimului tranzitoriu t_t scade deci odată cu **creşterea pulsaţiei ω_0** a trapezului reprezentativ al caracteristicii reale de frecvenţă $H_R(\omega)$.

2.4.3. Răspunsul la frecvenţă al sistemelor dinamice liniare monovariabile discrete; caracteristici de frecventa

Definiţia 2.6 **Răspunsul la frecvenţă al unui sistem dinamic monovariabil discret** este **răspunsul forţat** al acestuia pentru o **mărime de intrare sinusoidală**.

Pentru o oscilaţie sinusoidală complexă,

$$u(t) = U_m e^{j\omega_0 t} \sigma(t) . \qquad (2.463)$$

$$Z\{\, U_m e^{j\omega_0 t} \sigma(t)\, \} = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} U_m = U(z) \qquad (2.464)$$

Se consideră un sistem monovariabil discret descris de funcţia de transfer în *z*

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} .$$

Ecuaţia de transfer a acestui sistem devine

$$Y(z) = H(z)U(z) = H(z)\,\frac{z}{z - e^{j\omega_0}}\,U_m. \qquad (2.466)$$

Se admite ipoteza că $e^{j\omega_0}$ nu este pol pentru *H(z)*.

Ţinând seama de teorema lui Bezout se poate scrie

$$H(z) = (z - e^{j\omega_0})\,\widetilde{H}(z) + H(e^{j\omega_0})$$

$$\frac{H(z)}{z - e^{j\omega_0}} = \frac{H(e^{j\omega_0})}{z - e^{j\omega_0}} + \widetilde{H}(z) \qquad (2.468)$$

$\widetilde{H}(z)$ este o funcţie raţională care are acelaşi numitor (deci aceiaşi poli) ca şi *H(z)*.

Răspunsul sistemului se obţine aplicând transformata *Z* inversă în (2.468)

$$y(k) = Z^{-1}\left\{H(z)\,\frac{z}{z - e^{j\omega_0}}\,U_m\right\} =$$

$$= Z^{-1}\left\{H(e^{j\omega_0})\,\frac{z}{z - e^{j\omega_0}}\,U_m + U_m\, z\,\widetilde{H}(z)\right\} =$$

$$= U_m\, H(e^{j\omega_0})\, e^{j\omega_0 k} + y_l(k), k \geq 0.$$

$$y_l(k) = Z^{-1}\{z\widetilde{H}(z)U_m\}$$

este componenta tranzitorie (liberă) a răspunsului sistemului, care tinde la *0* cand *k* tinde la infinit.

. Se notează $y_f(k) = U_m H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 k} = Y_m e^{j(\omega_0 k - \varphi)}, k > 0.$

$y_f(k)$ reprezintă **componenta forţată a răspunsului sistemului.** Se observă că $y_f(k)$ este şi ea o **oscilaţie sinusoidală,** dar de amplitudine şi fază diferite de cele ale mărimii de intrare

Funcţia complexă *H(ejω)* se numeşte *răspunsul la frecvenţă* al unui *sistem monovariabil discret* şi caracterizează complet răspunsul forţat al sistemului pentru o mărime de intrare sinusoidală. Ca şi în cazul sistemelor continue din (2.470) rezultă

$$\frac{Y_m}{U_m} = \left|H(e^{j\omega})\right| = M(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = arg\ H(e^{j\omega})$$

Trebuie observat că răspunsul la frecvenţă $H(e^{j\omega})$ este o funcţie complexă periodică de perioadă 2π.

Se vor utiliza aceleaşi tipuri de reprezentări ca şi în cazul sistemelor continue. Se vor utiliza aceleaşi notaţii $H(e^{j\omega})$ scriindu-se

$$H(e^{j\omega} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\, arg\, H(e^{j\omega})} = M(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = \\ = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \qquad (2.463)$$

În (2.473) intervalul efectiv de variaţie pentru ω va fi $[0, \pi]$

În fig. 2.68 se prezintă exemple de reprezentări grafice pentru $H(e^{j\omega})$: locul de transfer - hodograful fazorului $H(e^{j\omega})$ în fig. 2.68.*a*, caracteristica atenuare-frecvenţă $A_{dB}(\omega)$ = $20lg\ M(\omega)$, în fig. 2.68.*b*, caracteristica logaritmică fază-pulsaţie $\varphi(\omega)$, în fig. 2.68.*c*, locul lui Black, fig. 2.68.*d*.

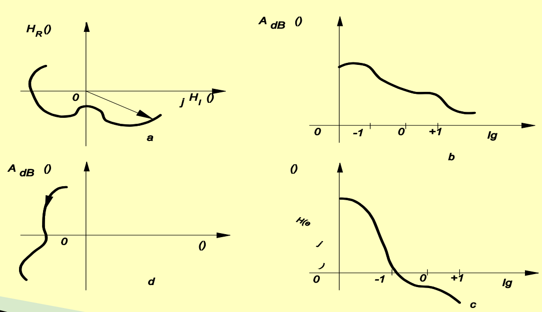

Fig. 2.68

Pentru un sistem descris de funcţia de transfer

$$H(z)=\frac{k}{z-1}\quad ,k>0 \qquad (2.474)$$

Răspunsul la frecvenţă este

$$H(e^{j\omega})=\frac{k}{e^{j\omega}-1}=\frac{k}{\cos\omega-1+j\sin\omega}=\frac{k(\cos\omega-1-j\sin\omega)}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

$$H_R(\omega)=\frac{+k(\cos\omega-1)}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}\ ;\ H_I(\omega)=\frac{-k\sin\omega}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

2.5. Analiza sistemelor monovariabile tipice
2.5.1. Clasificarea elementelor tipice

Sistemele la care mărimea de ieşire urmăreşte instantaneu orice modificare a mărimii de intrare se numesc ***sisteme (elemente) neinerţiale sau ideale***

Se deosebesc trei comportări tipice neinerţiale de bază

- element cu comportare proporţională – *P*

$$H(s)=k_p\,;Y(s)=k_pU(s)-continuu;\ H(z)=k_p\,;Y(z)=k_pU(z)-discret$$

- element cu comportare integratoare - *I*

$$H(s)=\frac{1}{T_i s}\,;Y(s)=\frac{1}{T_i s}U(s)-continuu$$

$$H(z)=\frac{k_i}{z-1}\,;Y(z)=\frac{k_i}{z-1}U(z)-discret. \qquad (2.514)$$

- element cu comportare derivativă – *D*

$$H(s)=T_d\,s\;;\;Y(s)=T_d\,s\,U(s)\text{ - }continuu$$

$$H(z)=k_d\frac{z-1}{z}\;;Y(z)=k_d\frac{z-1}{z}U(s)\text{ - }discret\,.$$

Sistemele reale netede, datorită elementelor acumulatoare de energie sau substanţă şi disipative (rezistive), se caracterizează printr-o **întârziere sau inerţie**.

Ordinul de întârziere sau de inerţie este determinat de numărul elementelor acumulatoare de energie sau substanţă (capacităţi) înseriate si coincide cu ordinul ecuaţiei diferenţiale.

Elementele cu întârziere de ordinul 1 şi de ordinul 2.

- element de întârziere de ordin 1 - *(T_1)*

$$H(s)=\frac{1}{T_1 s+1}\;;Y(s)=\frac{1}{T_1 s+1}U(s)\text{ - }continuu$$
$$H(z)=\frac{1-a}{z-a}\;;Y(z)=\frac{1-a}{z-a}U(z)\;;-1\le a\le 1\text{ - }discret \qquad (2.516)$$

- element de întârziere de ordinul 2 - *(T_2)*

$$H(s)=\frac{1}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+\omega_n^2}$$
$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{1}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}U(s)= \qquad (2.517)$$
$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+\omega_n^2}U(s)\text{ - }continuu$$

Cu ajutorul elementelor tipice, *P, I, D, T_1 , T_2* prin conexiunile „serie”, „paralel” şi „cu reacţie” se pot obţine sisteme dinamice oricât de complicate.

Pentru o funcţie de transfer de mai jos se utilizeaza simbolizarea *$(P+I_2+D)T_2$* sau *PI_2DT_2*.

$$\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2}=\frac{b_2+\frac{b_1}{s}+\frac{b_0}{s^2}+b_3s}{a_4s^2+a_3s+a_2}$$

Sisteme cu timp mort la care intre momentul modificării mărimii de intrare şi momentul apariţiei mărimii de ieşire există un **interval de timp numit *întârziere pură* sau *timp mort*.** Timpul mort este determinat de timpul de transport de substanţă, de transfer de energie, sau de propagare de semnale.

Din acest punct de vedere sistemele dinamice se împart în două grupe : a) *sisteme fără timp mort*, b) *sisteme cu timp mort*.

Funcţie de poziţia polilor şi zerourilor funcţiei de transfer se deosebesc
a) sisteme cu poli în tot planul *s* (pentru sistemele continue), respectiv în tot planul *z* (pentru sisteme discrete).

Polii funcţiei de transfer situaţi în *Re s > 0* (respectiv poli din $|z|>1$) sau polii multipli de pe axa imaginară *Re s = 0* (respectiv *pe* $|z|=1$) contribuie la răspunsul la impuls *h(t)* cu termeni ce tind spre infinit când timpul tinde spre infinit. Astfel că

$$\lim_{t\to\infty} |h(t)| = +\infty \qquad \lim_{k\to\infty} |h(k)| = +\infty$$

Asemenea elemente se numesc ***instabile***

b) sisteme cu poli în *Re s < 0* sau cu poli simpli pe *Re s = 0* (pentru sisteme continue), respectiv cu poli în interiorul cercului de rază unitară, $|z| < 1$, sau cu poli simpli pe $|z| = 1$ (pentru sistemele discrete).

$$\lim_{t\to\infty} |h(t)| < +\infty\,; \lim_{k\to\infty} |h(k)| < +\infty\,.$$

Asemenea **sisteme** se numesc ***stabile*** ;

După poziţia zerourilor funcţiei de transfer **sistemele stabile** se împart în **două grupe**:
b_1) sisteme **cu zerouri numai în *Re s < 0*** (cazul continuu) sau numai în $|z| < 1$ (cazul discret). Aceste sisteme se numesc **sisteme *(elemente) de fază minimă.***
b_2) sisteme cu **zerouri în tot planul *s*** respectiv în tot planul *z.* Asemenea sisteme se numesc ***sisteme (elemente) de fază neminimă*.**

2.5.2.2. Elementul de întârziere de ordinul unu, T_1

Comportarea sa este descrisă de o ecuaţie diferenţială de ordinul 1, de formele:

$$y^{(1)}(t) + a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \ , \ a_0, b_0 \neq 0 \qquad (2.528)$$

$$T_1\, y^{(1)}(t) + y(t) = k_p\, u(t) \qquad (2.529)$$

$T_1 = 1/a_0$ este o **constantă reală**. Din condiţia de omogenitate dimensională a relaţiei (2.529) T_1 se exprimă **în unităţi de timp** şi se numeşte ***constanta de timp a elementului.***

Constanta $k_p = b_0/a_0$ se numeşte ***factorul de amplificare al elementului.***

Funcţia de transfer a acestui element si raspunsul la impuls sunt:

$$H(s) = \frac{k_p}{T_1 s + 1}. \qquad (2.530)$$

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_p}{T_1 s + 1}\right\} = \frac{k_p}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \qquad (2.531)$$

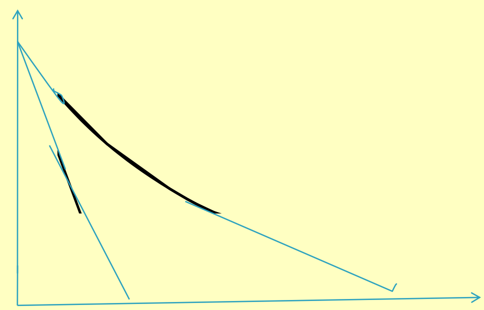

Fig. 2.77

În fig. 2.77 este reprezentat răspunsul la impuls normat $h(t)/k_p$. Subtangenta în origine la acest grafic este egală cu T_1. .

$$h(0_+) = \frac{k_p}{T_1} \qquad \lim_{t \to \infty} h(t) = 0$$

Răspunsul indicial se obţine pentru $u(t) = \sigma(t)$şi $y(0_-) = 0$

$$w(t) = y_f(t) = L^{-1}\left\{ \frac{k_p}{s(1+sT_1)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{k_p}{s} - \frac{k_p}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = \tag{2.532}$$

$$= k_p\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)\sigma(t) \;; t \geq 0$$

Componenta permanentă a răspunsului indicial este

$$w_p(t) = y_p(t) = k_p = H(0)\,,\; t \geq 0. \tag{2.533}$$

Componenta tranzitorie a răspunsului indicial

$$w_t(t) = y_t(t) = -k_p e^{-\frac{t}{T_1}} \tag{2.534}$$

Răspunsul indicial normat $w(t)/k_p$, este reprezentat în fig.2.78. Valorile iniţiale ale răspunsului indicial sunt

$$w(0_+)=0\,;\; w'(0_+)=w^{(1)}(t)\big|_{t=0_+}=\frac{k_p}{T_1}=\operatorname{tg}\alpha \qquad (2.535)$$

Interpretări pentru constanta de timp T_1: a) **constanta de timp T_1** reprezinta **intervalul de timp în care mărimea de ieşire creşte de la valoarea zero la valoarea $(1 - 1/e)k_p$ = $0,66k_p$, (deci** 0,66 din valoarea ei de regim staţionar);

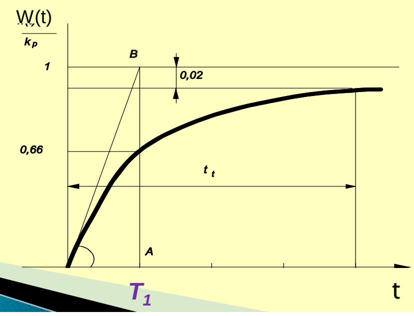

Fig. 278

b) constanta de timp T_1 este egală cu subtangenta *OA* a tangentei în origine *OB* la graficul *w(t)*.

Durata regimului tranzitoriu t_t, numită şi timp de stabilizare se obtine din conditia

$$|w(t)-w_p(t)|=|w_t(t)|<\Delta\,;\forall\, t\geq t_t \qquad (2.536)$$

Se obţine pentru $\Delta = 0,02k_p$, o durată a regimului tranzitoriu $t_{t2\%} = 4T_1$, iar pentru $\Delta = 0,05k_p$, $t_{t5\%} = 3T_1$.

Răspunsul la frecvenţă al elementului T_1 este dat de expresia

$$H(j\omega)=\frac{k_p}{1+j\omega T_1}=\frac{k_p}{1+j\eta}\,;\eta=\omega T_1 \qquad (2.538)$$

Caracteristicile de frecvenţă

$$H_R(\omega)=\frac{k_p}{1+\omega^2T_1^2}=\frac{k_p}{1+\eta^2}\,;H_I(\omega)=-\frac{\omega T_1 k_p}{1+\omega^2T_1^2}=-\frac{\eta k_p}{1+\eta^2}$$

$$M(\omega)=\frac{k_p}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}=\frac{k_p}{\sqrt{1+\eta^2}}\,;$$
$$\varphi(\omega)=-\arctan \omega T_1=-\arctan \eta\,. \qquad (2.539)$$

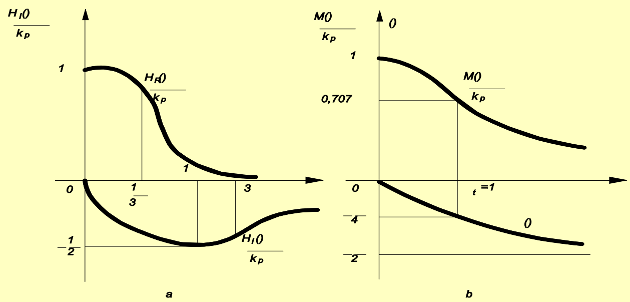

Fig. 2.79

În fig. 2.79.*a* sunt reprezentate caracteristicile de frecvenţă normate $H_R(\omega)/k_p$ si $H_I(\omega)/k_p$ iar în fig. 2.79.*b* sunt reprezentate caracteristicile $M(\omega)/k_p$ şi $\varphi(\omega)$.

Din caracteristica modul - frecvenţă $M(\omega)$ **rezultă că elementul T_1** permite trecerea frecvenţelor joase, deci se **comportă ca un filtru „trece -jos”. Intervalul de frecvenţe** cuprinse **între 0 şi ω_t** în care

$$M(\omega)>\frac{1}{\sqrt{2}}M(0)=0{,}707\,M(0)=0{,}707\,k_p \qquad (2.540)$$

se numeşte ***bandă de trecere.***
Frecvenţa (pulsaţia) ω_t se numeşte ***frecvenţă de tăiere*** şi se determină din condiţia

$$M(\omega_t)=\frac{1}{\sqrt{2}}M(0) \qquad \omega_t=\frac{1}{T_1}$$

Pentru a afla locul de transfer al elementului T_1 se elimină $\eta = \omega T_1$ între funcţiile $H_R(\omega)$ şi $H_I(\omega)$. Din (2.539) rezultă

$$\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}=-\omega T_1=-\eta \qquad (2.543)$$

Expresia locului de transfer

$$\left(H_R(\omega) - \frac{k_p}{2} \right)^2 + H_I^2(\omega) = \frac{k_p^2}{4} \qquad (2.545)$$

În coordonate carteziene $H_R(\omega)$, $H_I(\omega)$ relaţia (2.545) reprezintă **ecuaţia unui cerc cu centrul în punctul *(k_p/2, 0)***, de **rază *k_p/2* şi care trece prin origine**.

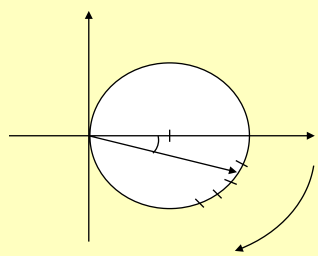

Fig. 2.80

Locul de transfer este reprezentat în fig. 2.80, porţiunea cu

Caracteristica atenuare-frecvenţă se calculează cu relaţia

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \frac{k_p}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}} = 20 \lg \frac{k_p}{\sqrt{1+\eta^2}} =$$
$$= 20 \lg k_p - 20 \lg \sqrt{1+\eta^2}. \qquad (2.546)$$

- pulsaţia de frângere $\omega_f = 1/T_1$; $\eta = 1$;
- asimptota la frecvenţă joase pentru $\omega << 1/T_1$ ($\eta << 1$)

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg k_p \qquad (2.547)$$

- asimptota la frecvenţă înalte, pentru $\omega >> 1/T_1$ ($\eta >> 1$)

$$A_{dB}(\omega) = 20 \lg k_p - 20 \lg \eta \qquad 2.548)$$

Cele două asimptote au pantele

$$m_0 = 0 \ [dB/dec]; \quad m_1 = m_0 - 20 \ [dB/dec] = -20 \ [dB/dec].$$

Pentru caracteristica fază-frecvenţă se obţine din (2.539) asimptotele

$$\varphi(\omega)=0 \quad ; \quad \omega \gg \frac{1}{T_1}, (\eta \gg 1)$$
$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2} \; ; \; \omega \ll \frac{1}{T_1}, (\eta \ll 1) \qquad (2.550)$$

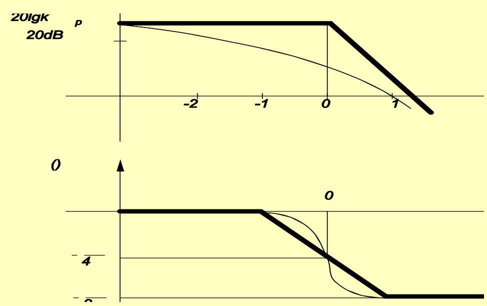

Fig. 2.81

Diagrama Bode asimptotică, carac-eristicile $A_{dB}(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ asimptotice sunt reprezentate cu linie continuă în fig. 2.81.

Exemple de sisteme care se comportă ca un element T_1:

1. Se consideră **circuitul electric *RC* din fig. 2.82** pentru care se pot scrie ecuaţiile

$$u=Ri+y \; ; \; y=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \qquad i=C\,y^{(1)}(t) \quad T_1 y^{(1)}(t)+y(t)=u(t),\; T_1=RC$$

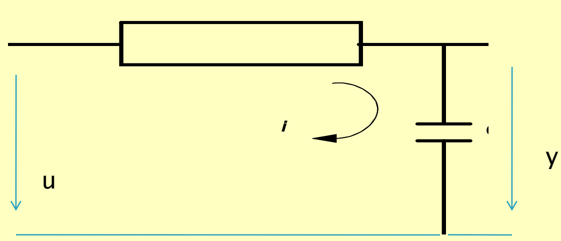

Fig. 2.82

2. Se consideră **circuitul *RL* din fig. 2.83** pentru care se scriu ecuaţiile

$$u=Li^{(1)}(t)+y \; ; \; y=Ri \,. \quad T_1 y^{(1)}(t)+y(t)=u(t) \; ; \; T_1=LR$$

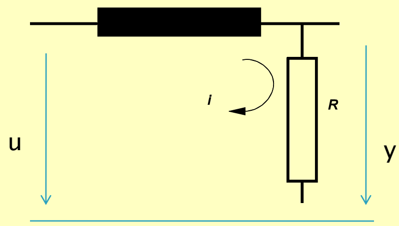

Fig. 2.83

2.5.2.3. Elementul de întârziere de ordinul doi, T_2

Elementul de întârziere de ordinul doi conţine două elemente acumulatoare de energie sau substanţă.

Pentru elementul de ordin doi ecuaţia diferenţială se poate scrie în mai multe forme, ca de exemplu

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)\ ,\ a_0\ ,\ a_1 > 0\ , b_0 \neq 0$$

$$\frac{1}{a_0} = T_1 T_2\ , \frac{a_1}{a_0} = T_1 + T_2\ , \frac{b_0}{a_0} = k_p \qquad (2.565)$$