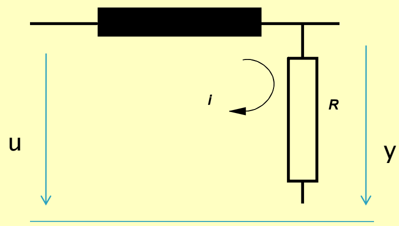

Fig. 2.83

2.5.2.3. Elementul de întârziere de ordinul doi, T_2

Elementul de întârziere de ordinul doi conţine două elemente acumulatoare de energie sau substanţă.
Pentru elementul de ordin doi ecuaţia diferenţială se poate scrie în mai multe forme, ca de exemplu

$$y^{(2)}(t)+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=b_0 u(t),\ a_0,\ a_1>0,\ b_0\neq 0$$

$$\frac{1}{a_0}=T_1T_2,\ \frac{a_1}{a_0}=T_1+T_2,\ \frac{b_0}{a_0}=k_p \qquad (2.565)$$

$$T_1T_2\, y^{(2)}(t)+(T_1+T_2)\,y^{(1)}(t)+y(t)=k_p\, u(t) \qquad (2.567)$$

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}},\ \xi=\frac{1}{2}\frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1T_2}}$$

$$y^{(2)}(t)+2\,\xi\,\omega_n\, y^{(1)}(t)+\omega_n^2\, y(t)=k_p\,\omega_n^2\, u(t). \qquad (2.569)$$

***T_1, T_2* sunt constantele de timp, *k_p* este factorul de amplificare, *ω_n* - pulsaţia naturală, *ξ* - factorul de amortizare**.

Funcţia de transfer a elementului T_2 este

$$H(s)=\frac{k_p}{T_1T_2\,s^2+(T_1+T_2)\,s+1}=\frac{k_p\,\omega_n^2}{s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+\omega_n^2}\ . \qquad (2.570)$$

Ecuatia caracteristica si rădăcinile ei sunt:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \;\; ; \;\; T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 = 0$$

$$s_{1,2} = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\,) \quad sau \quad s_{1,2} = -\frac{1}{T_{1,2}} \qquad (2.572)$$

În funcţie de valoarea factorului de amortizare ξ se disting patru cazuri

1) elementul T_2 aperiodic: $\xi > 1$.

$$s_1 = -\frac{1}{T_1}\,;\, s_2 = -\frac{1}{T_2}\,, T_1 > T_2 > 0\,.$$

Răspunsul la impuls are expresia

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{k_p}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_3)s + 1}\right\} =$$

$$= \frac{k_p}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\sigma(t) \qquad (2.574)$$

$$h(0_+) = 0;\; h^{(1)}(0_+) = \frac{k_p}{T_1 T_2} = k_p \omega_n^2\,;\, \lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

Răspunsul la impuls este reprezentat în fig. 2.85.

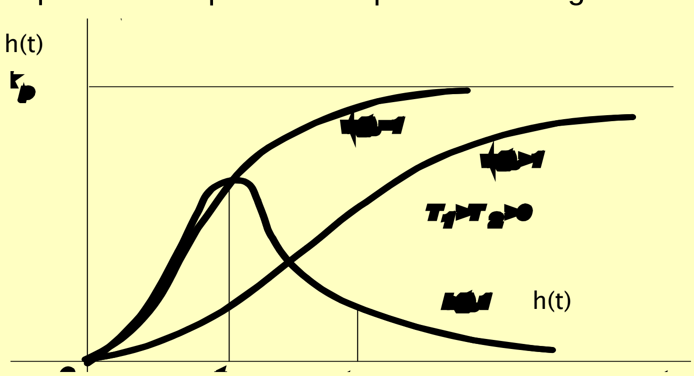

Fig. 2.85

Răspunsul indicial se obţine cu relaţia (2.575) si este reprezentat grafic in fig. 2.85

$$w(t)=L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{k_p}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}\right\}=$$

$$=k_p\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\sigma(t) \qquad (2.575)$$

$$w(0_+)=0\,,w^{(1)}(0_+)=0\,;\ \lim_{t\to\infty}w(t)=k_p\,.$$

2) elementul T_2 aperiodic critic: $\xi = 1$.

$$s_1=s_2=-\frac{1}{T_1}=-\xi\,\omega_n\,,T_1=T_2>0.$$

$$h(t)=L^{-1}\{\ H(s)\ \}=L^{-1}\left\{\frac{k_p}{(T_1s+1)^2}\right\}=\frac{k_p}{T_1^2}\,t\,e^{-\frac{t}{T_1}}\sigma(t)$$

$$h(0_+)=0\ \ ,\ h^{(1)}(0_+)=\frac{k_p}{T_1^2}\,.$$

$$w(t)=L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{k_p}{s\,(T_1s+1)^2}\right\}=$$

$$=k_p\left[1-\left(1+\frac{t}{T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]\sigma(t).$$

$$w(0_+)=0\ \ ,w^{(1)}(0_+)=0\ \ ;\ \lim_{t\to\infty}w(t)=k_p\,.$$

3) Elementul T_2 oscilant: $0 < \xi < 1$.

$$s_{1,2}=\omega_n\left(-\xi\pm j\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

$$h(t)=L^{-1}\{\ H(s)\ \}=L^{-1}\left\{\frac{k_p\,\omega_n^2}{s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+\omega_n^2}\right\}=$$

$$=\frac{k_p\,\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\,\omega_n\,t}\bullet\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\ \ t\right)\sigma(t).$$

$$w(t)=L^{-1}\{\ \frac{H(s)}{s}\ \}=L^{-1}\left\{\frac{k_p\,\omega_n^2}{s\,(s^2+2\,\xi\,\omega_n\,s+\omega_n^2)}\right\}=$$

$$=k_p\left[1-\frac{e^{-\xi\,\omega_n\,t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\bullet\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]\sigma(t).$$

Punctele de extrem relativ ale funcţiei (2.584) au abscisele şi ordonatele:

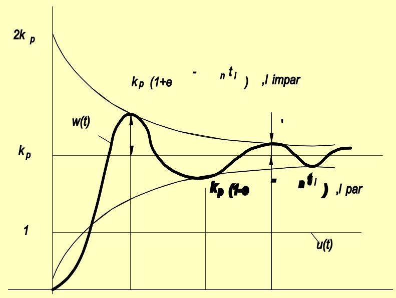

Fig. 2.86

$$t_l = \frac{l\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, l = 0,1,2,\ldots \qquad w(t_l) = \begin{cases} k_p\left(1+e^{-\xi\omega_n t_l}\right), l = 1,3,5,\ldots \\ k_p\left(1-e^{-\xi\omega_n t_l}\right), l = 0,2,4. \end{cases} \quad 2.587)$$

Valoarea maximă a răspunsului se obţine pentru *l = 1*

$$w_M = y_{\max} = w(t_1) = k_p\left(1+e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) \qquad \sigma = \frac{y_{\max}-y_s}{y_s} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Deoarece în regim staţionar $w(t) = y(t) = y_s = k_p$, se determină **suprareglarea răspunsului indicial,** conform relaţiei (2.456)

$$\sigma = \frac{y_{\max}-y_s}{y_s} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad (2.589)$$

Se defineşte **decrementul oscilaţiilor λ** ca fiind **raportul amplitudinilor a două „pulsuri” de aceiaşi semn ale regimului tranzitoriu.**

$$\lambda = \frac{w_t(t_{2l+1})}{w_t(t_{2l-1})} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \; l \geq 1. \qquad (2.590)$$

Din relaţia (2.590) se poate determina factorul de amortizare ξ

$$\xi = \frac{\ln\lambda}{\sqrt{4\pi^2+\ln^2\lambda}} \qquad (2.591)$$

Se pun in evidenta două regimuri limită:

• pentru $\xi = 0$, $\lambda = 1$, oscilaţiile nu se amortizează şi din (2.584) rezultă un regim oscilant

$$w(t) = k_p(1 - \cos\omega_n t), t \geq 0 \qquad (2.592)$$

- pentru $\xi = 1$, se obţine regimul aperiodic critic: *w(t)* dat de (2.578)

Durata regimului tranzitoriu, conform relaţiilor (2.458) - (2.462), pentru o abatere $\Delta = 0.02k_p = 0.02w_p$, rezultă că este dată de relaţia

$$t_t = \frac{4}{\xi\,\omega_n};|w(t) - w_p(t)| < 0,02k_p, (\forall)\, t \geq \frac{4}{\xi\,\omega_n}. \qquad (2.593)$$

4) Elementul T_2 conservativ, $\xi = 0$.

Pentru $\xi = 0$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt pur imaginare

$$s_{1,2} = \pm\, j\,\omega_n. \qquad (2.594)$$

Răspunsul la impuls se obţine din (2.580) pentru $\xi = 0$

$$h(t) = k_p\,\omega_n \sin(\omega_n t)\,\sigma(t) \qquad (2.595)$$

Răspunsul indicial este dat de ecuaţia (2.592).
Funcţiile *h(t)* şi *w(t)* pentru $\xi = 0$ sunt oscilaţii neamortizate, cu pulsaţia egală cu pulsaţia naturală ω_n .

Pentru $0 \leq \xi < 1$ *elemetul* T_2 nu mai poate fi descompus în elemente de ordinul unu (T_1) contituind el însuşi un element tip. În fig. 2.88.*a,b*. se prezintă răspunsul la impuls *h(t)* respectiv răspunsul indicial *w(t)* ale elementului T_2 *pentru* $\xi \in [0,1]$.

Răspunsul la frecvenţă al elementului T_2 se obţine înlocuind $s = j\omega$ în funcţia de transfer .

$$H(j\omega) = \frac{k_p\,\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\,2\,\xi\,\omega_n\,\omega} = \frac{k_p}{1 - \eta^2 + j\,2\,\xi\,\eta};\ \eta = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad (2.596)$$

Expresiile pentru caracteristicile de frecvenţă sunt:

$$H_R(\omega)=\frac{k_p\,\omega_n^2(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}=\frac{k_p(1-\eta^2)}{(1-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2} \qquad (2.598)$$

$$H_I(\omega)=\frac{-2k_p\,\xi\,\omega_n^3\,\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}=\frac{-2k_p\,\xi\,\eta}{(1-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2} \qquad (2.599)$$

$$M(\omega)=\frac{k_p\,\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}=\frac{k_p}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2}} \qquad (2.600)$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\,\frac{2\xi\,\omega_n\,\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=-\mathrm{arctg}\,\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2} \qquad (2.601)$$

Caracteristica $H_R(\omega)$ prezentată în fig. 2.89, admite un maxim, pentru $\xi < 1/2$, de coordonate

$$\eta_1=\sqrt{1-2\xi}\;;\; H_{R\max}(\omega)=\frac{k_p}{4}\bullet\frac{1}{\xi-\xi^2} \qquad (2.602)$$

iar pentru orice $\xi \geq 0$ admite un minim de coordonate

$$\eta_2=\sqrt{1+2\xi}\;;\; H_{R\min}(\omega)=-\frac{k_p}{4}\bullet\frac{1}{\xi+\xi^2} \qquad (2.603)$$

Caracteristica $H_I(\omega)$ prezentată în fig. 2.89 este negativă şi are un minim de abscisă

$$\eta_3=\sqrt{\frac{1-2\xi^2+2\sqrt{\xi^4-\xi^2+1}}{3}}\;,\eta_1<\eta_3<\eta_2 \qquad (2.604)$$

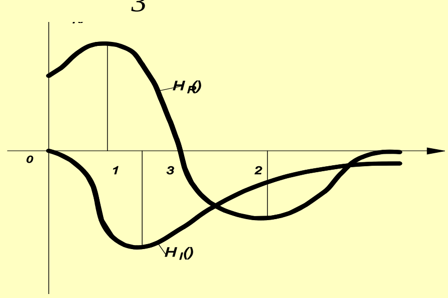

Fig. 2.89

Caracteristica $M(\omega)$, fig. 2.90, pentru $\xi < 1/\sqrt{2}$, are un maxim , de coordonate $(\eta r, Mr)$, care evidentiaza un fenomen de rezonanta

$$\eta_r = \sqrt{1-2\xi^2}\,;\, M_{\max}(\omega) = \frac{k_p}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} = M_r = M(\omega_r) \quad (2.605)$$

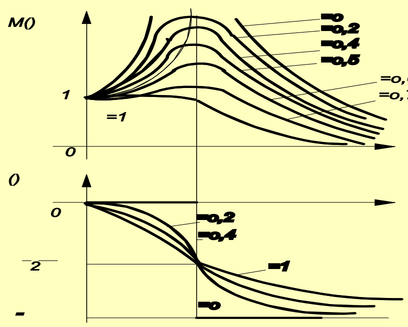

Fig. 2.90

Pulsaţia de rezonanţă rezultă din relaţia (2.605)

$$\omega_r = \omega_n \eta_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} < \omega_{n'}$$

Se defineşte factorul de rezonanţă Q,

$$Q = \frac{M(\omega_r)}{M(0)} = \frac{M_{\max}(\omega)}{M(0)} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} \quad (2.607)$$

Caracteristicile $M(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ sunt prezentate în fig. 2.90. Pentru locul de transfer al elementului T_2 se utilizează o reprezentare grafică adimensională, fig. 2.91; pentru $k_p = 1$ si diferite valori ale factorului de amortizare ξ, pentru pulsaţia normată $\eta \in (0, +\infty)$ se trasează

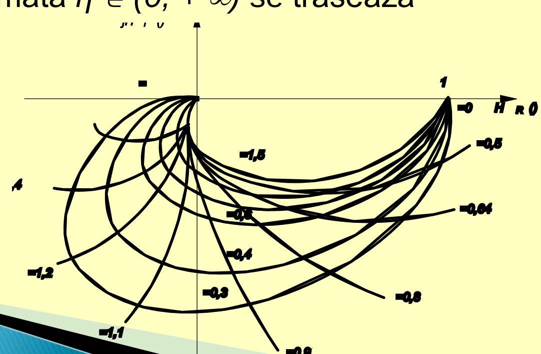

Fig. 2.91

Caracteristica atenuare-frecvenţă este dată de relaţia

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg M(\eta) = 20\lg \frac{k_p}{\sqrt{(1-\eta 2)^2 + 4\xi^2\eta^2}} =$$

$$= 20\lg k_p - 20\lg \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2} \qquad (2.608)$$

Caracteristica are asimptotele , pantele

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg k_p \quad \text{pentru } \eta \gg 1 \qquad m_0 = 0 \text{ dB/dec;}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\lg k_p - 20\lg \eta^2 = 20\lg k_p - 40\lg \eta = -40\lg \eta$$

$$m_1 = m_0 - 40 \text{ dB/dec} = -40 \text{ dB/dec}$$

Pulsaţia de frângere, pentru care cele două asimptote se intersectează este

$$\omega_f = \omega_n \ , \eta = 1$$

Asimptotele caracteristicii fază - frecvenţă se obţin din relaţia (2.601)

$$\varphi(\omega) = 0 \quad pentru \ \eta \gg 1 ;$$
$$\varphi(\omega) = -\pi \quad pentru \ \eta \ll 1 \qquad (2.612)$$

La pulsaţia de frângere $\eta = 1$, faza are valoarea $-\pi/2$.

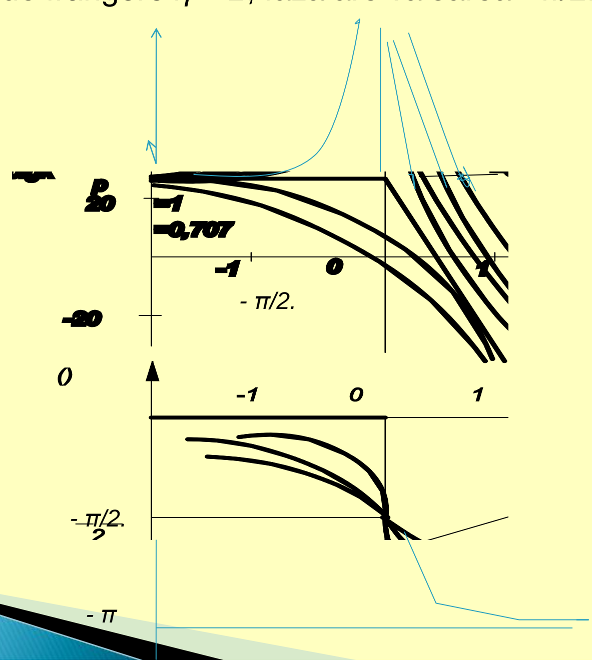

Fig.2.92

Exemple de elemente T2 : 1. Motorul de curent continuu.

Ecuaţiile de functionare a motorului sunt

$$\begin{cases} u_a - k_1\,\omega = R_a\,i_a + L_a\dfrac{d\,i_a}{dt} \\ m_m = k_2\,i_a = J\,\dfrac{d\,\omega}{dt}\ . \end{cases} \qquad (2.516)$$

Eliminând curentul i_a din ecuaţiile (2.616) şi notând $y(t) = \omega(t)$ şi $u(t) = u_a$ se obţine ecuaţia

$$\frac{L_a J}{k_2}\,y^{(2)}(t) + \frac{R_a J}{k_2}\,y^{(1)}(t) + k_1\,y(t) = u(t) \qquad y^{(2)}(t) + \frac{R_a}{L_a}\,y^{(1)}(t) + \frac{k_1 k_2}{L_a J}\,y(t) = \frac{k_2}{L_a J}\,u(t)$$

Se introduc notaţiile (2.618)

$$T_m = \frac{JR_a}{k_1 k_2}\,;\, T_a = \frac{L_a}{R_a}\,;\, \omega_n^2 = \frac{k_1 k_2}{L_a J} = \frac{1}{T_m T_a}\,;$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_m}{T_a}} = \frac{R_a\sqrt{J}}{2\sqrt{k_1 k_2 L_a}}\,;\, k_p = \frac{1}{k_1} \qquad (2.619)$$

unde T_m este constanta de timp electromecanică a motorului; T_a este constanta de timp a circuitului rotoric.

Ecuaţia (2.618) devine

$$y^{(2)}(t) + 2\,\xi\,\omega_n\,y^{(1)}(t) + \omega_n^2\,y(t) = k_p\,\omega_n^2\,u(t) \qquad (2.620)$$

Pentru $\xi \geq 1$, $T_m \geq 4T_a$, rădăcinile ecuaţiei caracteristice ale ecuaţiei (2.620) sunt reale negative, deci **motorul de curent continuu este un element T_2 aperiodic**; pentru $\xi < 1$, $T_m < 4T_a$, motorul de curent continuu este un **element T_2 oscilant.**

3) Fie sistemul hidraulic prezentat în fig. 2.93 format din două rezervoare legate în serie printr-o rezistenţă hidraulică. Se presupune că prin robinetele V_0, V_1, V_2 curgerea este laminară, iar rezistenţele hidraulice ale acestor robinete sunt R_0, R_1, R_2.

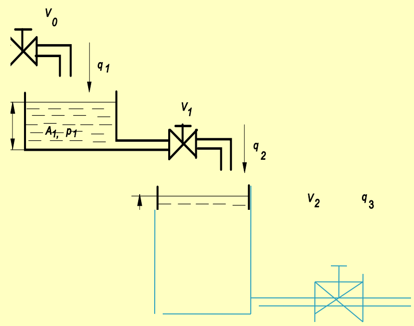

Fig.2.93

Ecuaţiile de echilibru de masă pentru cele două rezervoare sunt

$$A_1 \rho \, d\, h_1 = (q_1 - q_2)\, dt$$
$$A_2 \rho \, d\, h_2 = (q_2 - q_3)\, dt$$

$$q_2 = \frac{\rho g h_1}{R_1} \;;\; q_3 = \frac{\rho g h_2}{R_2}$$

(2.621)

Eliminând variabilele intermediare se obţine ecuaţia generală a ansamblului celor 2 rezervoare având ca **mărime de ieşire nivelul $h_2(t)$, deci $y(t) = h_2(t)$** şi ca **mărime de intrare debitul q_1; deci $u(t) = q_1(t)$.**

$$\frac{A_1 R_1}{g}\frac{A_2 R_2}{g} y^{(2)}(t) + \left(\frac{A_1 R_1}{g} + \frac{A_2 R_2}{g}\right) y^{(1)}(t) + y(t) = \frac{R_2}{\rho g} u(t)\;. \qquad (2.623)$$

$$T_1 T_2 y^{(2)}(t) + (T_1 + T_2)\, y^{(1)}(t) + y(t) = k_p u(t) \qquad (2.625)$$

$$T_1 = \frac{A_1 R_1}{g} > 0\,; T_2 = \frac{A_2 R_2}{g} > 0\,; k_p = \frac{R_2}{\rho g} > 0$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice asociate ecuaţiei (2.625) sunt reale, distincte, negative şi, deci, ansamblul celor două rezervoare se comportă ca un element T_2 aperiodic.

2.5.2.6. Elementul „trece-tot”

Este un element descris de o ecuaţie diferenţială de forma

$$T_1 y^{(1)}(t) + y(t) = -T_1 u^{(1)}(t) + u(t) \qquad (2.654)$$

respectiv de funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{-T_1 s + 1}{T_1 s + 1} \qquad (2.655)$$

Răspunsurile la impuls si indicial sunt

$$h(t) = L^{-1}\{\ H(s)\} = L^{-1}\left\{ -1 + \frac{2}{T_1}\frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} =$$
$$= -\delta(t) + \frac{2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \sigma(t),\ h(0_+) = \frac{2}{T_1},\ h(+\infty) = 0 \qquad (2.656)$$

$$w(t) = L^{-1}\left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \frac{2}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}} \right)\sigma(t),$$
$$w(0_+) = -1,\ w(+\infty) = 1. \qquad (2.657)$$

Aceste răspunsuri sunt reprezentate grafic în fig. 2.101.

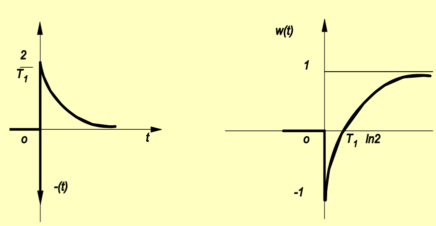

Fig. 2.101

Pentru $s = j\omega$ din (2.655) se obţine răspunsul la frecvenţă

$$H(j\omega) = \frac{-T_1 j\omega + 1}{T_1 j\omega + 1} = \frac{1 - T_1^2\omega^2 - j2T_1\omega}{1 + T_1^2\omega^2} = \frac{1 - \eta^2 - j2\eta}{1 + \eta^2}, \qquad (2.658)$$

Caracteristicile de frecvenţă au expresiile

$$H_R(\omega) = \frac{1 - T_1^2\omega^2}{1 + T_1^2\omega^2} = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2};$$

$$H_I(\omega) = \frac{-2T_1\omega}{1 + T_1^2\omega^2} = \frac{-2\eta}{1+\eta^2} \qquad (2.659)$$

$$M(\omega) = 1; \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2T_1\omega}{1-T_1^2\omega^2} = -\operatorname{arctg}\frac{2\eta}{1-\eta^2}. \qquad \eta = \omega T_1$$

Dacă se elimină η între $H_R(\omega)$ şi $H_I(\omega)$ din (2.659) se obţine ecuaţia locului de transfer

$$H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega) = 1 \qquad (2.661)$$

care este un cerc cu centrul în originea planului $H_R(\omega)$, $jH_I(\omega)$ şi de rază unitară, fig. 2.102.

Elementul „trece-tot ” permite trecerea uniformă a **tuturor frecvenţelor** cu **introducerea unor defazaje funcţie de frecvenţă.**

Din acest motiv se mai numeşte şi ***element defazor pur*.**

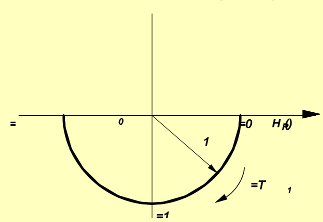

Fig. 2.102

Exemple de sisteme fizice care se comportă ca un **element „trece- -tot ”.**

1) Se consideră un **termometru cu mercur.** La o creştere bruscă a temperaturii mediului exterior (care constituie mărimea de intrare), are loc mai întâi **dilatarea tubului de sticlă, c**eea ce produce iniţial o scădere a nivelului mercurului. Apoi pe măsură ce mercurul se încălzeşte, nivelul acestuia creşte, urmărind creşterea temperaturii.

2.5.2.7. Elemente de fază minimă şi neminimă

Se pune întrebarea în ce condiţii între *M(ω)* şi *φ(ω)* există o **relaţie bine determinată**, astfel ca sistemul să poată fi caracterizat numai de una din aceste două caracteristici de frecvenţă.

Fie răspunsul la frecvenţă a unui sistem dinamic

$$H(j\omega)=H_R(\omega)+j\,H_I(\omega). \qquad (2.662)$$

Dacă *H(s)* este o funcţie de transfer care are poli şi zerouri numai în *Re s < 0*, atunci sunt verificate transformatele Hilbert

$$H_I(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(\eta)}{\omega-\eta}d\eta - transformarea\ directa$$
$$H_R(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_I(\eta)}{\omega-\eta}d\eta - transformarea\ inversa \qquad (2.663)$$

în care *ω* este pulsaţia în [rad/s]

Din expresia răspunsului la frecvenţă, scrisă sub forma polară

$$H(j\omega)=M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \qquad (2.664)$$

rezultă

$$H_l(j\omega)=\ln H(j\omega)=\ln M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\ln M(\omega)+j\,\varphi(\omega)$$
$$=A(\omega)+j\,\varphi(\omega);\ A(\omega)=\ln M(\omega) \qquad (2.665)$$

A(ω)* se numeşte *atenuare.

$H_l(s)$ corespunde funcţiei de transfer

$$H_l(s)=\ln H(s)=\ln\frac{Q(s)}{P(s)}=\ln Q(s)-\ln P(s) \qquad (2.666)$$

Zerourile polinoamelor *Q(s)* şi *P(s)* sunt **singularităţi pentru** funcţia $H_l(s)$. Această **funcţie este olomorfă** daca aceste rădacini se afla în *Re s<0.*

Pentru sistemele liniare care satisfac transformarea (2.667), deci care au **funcţii de transfer cu zerouri şi poli numai în *Re s < 0***, $H_l(s)$ satisface relaţiile transformatei Hilbert (2.663) care devin

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\eta)}{\omega-\eta}d\eta \, ; \, A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta)}{\omega-\eta} \qquad (2.668)$$

Relaţiile (2.668) se numesc ***condiţiile lui Bode*** şi satisfac o **legătură biunivocă între *A(ω)* şi *φ(ω)*** pentru o anumită clasă de sisteme numite ***sisteme de fază minima*.**

Definitie. Sistemele monovariabile ale căror funcţii de transfer au **poli şi zerouri numai în *Re s < 0*** se numesc ***sisteme de fază minimă* .**

Sistemele monovariabile ale căror **funcţii de transfer au poli numai în *Re s < 0*** şi **zerouri în tot planul *s*** se numesc ***sisteme de fază neminimă.***