Dintre toate sistemele care au **acelaşi modul al răspunsului la frecvenţă,** numai **sistemele de fază minimă introduc cel mai mic defazaj dintre mărimea de intrare şi mărimea de ieşire, oricare ar fi *ω*.**

În funcţia de transfer a oricărui sistem de **faza neminimă** se poate pune în evidenţă un factor care corespunde unui **sistem cu fază minimă** şi un factor care corespunde unui **element de tip „trece-tot" sau defazor pur**.
Functia de transfer a unui element de faza neminima se poate scrie in forma factorizata

$$H_{nm}(s)=\frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P(s)} \qquad H_{nm}=\frac{Q_1(s)}{Q_1(-s)}\bullet\frac{Q_1(-s)Q_2(s)}{P(s)}=H_t(s)H_m(s)$$

$$H_t(s)=\frac{Q_1(s)}{Q_1(-s)};\ H_m(s)=\frac{Q_1(-s)Q_2(s)}{P(s)} \qquad (2.671)$$

în care $P(s)$ şi $Q_2(s)$ sunt polinoame cu zerouri în $Re\ s < 0$, iar $Q_1(s)$ este un polinom cu zerouri numai în $Re\ s > 0$. Polinomul $Q_1(-s)$ are toate zerourile în $Re\ s < 0$.

$H_t(s)$ este **funcţia de transfer a unui element „trece-tot"** sau defazor pur. ***$H_m(s)$* este funcţia de transfer a unui sistem de fază minimă.**

Răspunsul la frecvenţă a elementului „trece-tot" este

$$H_t(j\omega)=\frac{Q_1(j\omega)}{Q_1(-j\omega)}=M_t(\omega)e^{j\varphi_t(\omega)}=e^{j\varphi_t(\omega)} \qquad (2.672)$$

$$M_t(\omega)=|H_t(j\omega)|=\frac{|Q_1(j\omega)|}{|Q_1(-j\omega)|}=1 \qquad (2.673)$$

În funcţia de transfer a **unui element „trece-tot"** gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului. Fie *n* gradul numitorului şi *m* gradul numărătorului funcţiei de transfer $H_m(s)$ a **sistemului de fază minimă.**

Deoarece **sistemul de fază minimă are zerourile şi polii numai în *Re s < 0*,** conform principiului argumentului (vezi paragraful 2.3.1.3.2, relaţia (2.84)) **acest sistem va introduce un defazaj dintre mărimea de intrare şi mărimea de ieşire $\varphi_m(\omega)$ dat de relaţia**

$$-\varphi_m(\omega) = -\arg H_m(j\omega) = \pi(n-m) \qquad (2.674)$$

Deoarece **sistemul de fază neminimă** cu funcţia de transfer **$H_{nm}(s)$,** corespunzător sistemului de fază minimă $H_m(s)$, **are *z* zerouri în *Re s > 0*, corespunzătoare la *z* elemente „trece-tot”** înseriate cu sistemul de fază minimă $H_m(s)$, va introduce **un defazaj dintre mărimea de intrare şi ieşire $-\varphi_{nm}(\omega)$,** conform relaţiei (2.84) de forma

$$-\varphi_{nm}(\omega) = -\arg H_{nm}(j\omega) = 2\pi z + \pi(n-m) \qquad (2.675)$$

Comparând relaţiile (2.674) şi (2.675) este evident că

$$-\varphi_{nm}(\omega) > -\varphi_m(\omega) \qquad (2.676)$$

Din relaţia (2.675) rezultă că în cazul **sistemelor cu fază neminimă** hodograful vectorului $H_{nm}(j\omega)$ înconjoară originea axelor în sens pozitiv de *z* ori, adică **de atâtea ori câte elemente „trece-tot” (defazori puri) are funcţia de transfer $H_{nm}(s)$.**

Din relaţiile (2.670), (2.673) rezultă că răspunsurile la frecvenţă $H_{nm}(j\omega)$ şi $H_m(j\omega)$ au acelaşi modul

$$|H_{nm}(j\omega)| = |H_m(j\omega)| \bullet |H_t(j\omega)| = |H_m(j\omega)| \qquad (2.677)$$

Toate sistemele monovariabile, caracterizate prin acelaşi modul al răspunsului la frecvenţă, se deosebesc numai prin elemente „trece-tot” (2.672) conform factorizării (2.670).

### 2.5.2.8. Elemente cu timp mort

În procesele fizice în care apar fenomene de transport de masă sau energie, transport care se realizează cu viteze finite, se impune cu necesitate utilizarea unor modele matematice care să evidenţieze întârzierile introduse. Aceste întârzieri nete, numite şi **întârzieri pure sau timpi morţi**, care apar pe calea funcţională cauză efect, sunt descrise în cazul sistemelor netede cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale cu argument întârziat. Dacă se notează cu $\tau$ timpul mort, **relaţia intrare-ieşire a unui element neted cu timp mort neinerţial este de forma**

$$y(t) = k_p u(t - \tau),\ t \in \Re$$

$$H(s) = k_p e^{-s\tau}$$

Răspunsul la impuls şi răspunsul indicial sunt date de relaţiile (2.680) si sunt reprezentate in fig. 2.103.

$$h(t) = L^{-1}\{ H(s) \} = k_p \delta(t - \tau)$$

$$w(t) = L^{-1}\left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = k_p \sigma(t - \tau) \qquad (2.680)$$

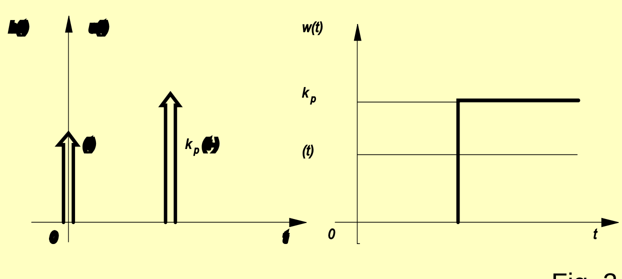



Fig. 2.103

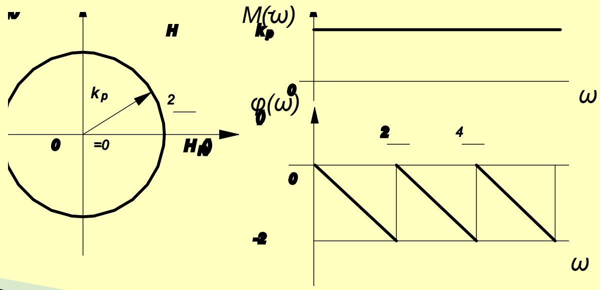
Răspunsul la frecvenţă a elementului cu timp mort este

$$H(j\omega) = k_p e^{-j\omega\tau} = k_p \cos\omega\tau - jk_p \sin\omega\tau \qquad (2.681)$$

Caracteristicile de frecvenţă sunt

$$H_R(\omega) = k_p \cos \omega\tau \; ; \; H_I(\omega) = -k_p \sin \omega\tau$$
$$M(\omega) = k_p \; ; \; \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\omega\tau)) = -\omega\tau \qquad (2.682)$$

**Caracteristicile *M(ω)* şi *φ(ω)*** sunt reprezentate în fig. 2.105.*b*. Din (2.682) rezultă că **modulul *M(ω)* este independent de frecvenţă, iar faza *φ(ω)* este o funcţie liniară de frecventă**, factorul de proporţionalitate fiind timpul mort *τ*




Locul de transfer este un cerc de raza $k_p$, fig. 2.105.*a,* de ecuaţie

$$H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega) = k_p^2 \qquad (2.683)$$

Este parcurs de un număr infinit de ori când *ω* variază de la *0* la $\infty$ .

**Exemple de elemente cu timp mort:**

1) **Fie o bandă transportoare, fig. 2.106.*a*** care se deplasează cu **viteză constantă *v*. Mărimea de intrare *u(t)* este secţiunea *S*** prin care materialul se scurge din buncărul *1* pe banda transportoare *2*, iar **mărimea de ieşire *y(t)* este debitul *Q* al materialului deversat** în buncărul *3*. Orice modificare a secţiunii *S* va determina o variaţia debitului *Q* numai după un timp *τ = L/v*.

2) Fie o **instalaţie de amestecare a două lichide de natură diferită fig. 2.106.*b*.** Modificarea in treaptă a debitului unui lichid va determina variaţia concentraţiei amestecului, care va fi sesizată în punctul de măsurare *M*, abia după timpul mort *τ = L/v.*

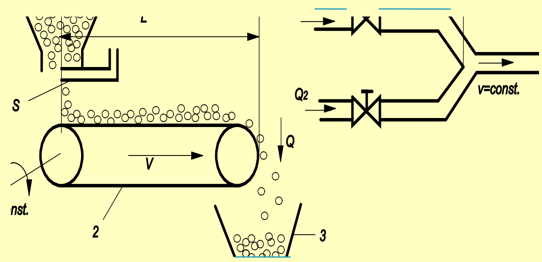



Fig. 2.106

**2.5.2.9. Elemente combinate**

**2.5.2.9.1. Elementul integrator cu întârziere $IT_1$**

Este descris de o ecuaţie diferenţială de forma

$$T_1 T_2 y^{(2)}(t) + T_2 y^{(1)}(t) = u(t) \qquad (2.684)$$

respectiv de funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{1}{T_2 s (T_1 s + 1)} \qquad (2.685)$$

Răspunsul la impuls, reprezentat in figura 2.107, este descris de relatia

$$h(t) = L^{-1}\{ H(s) \} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{T_2 s} - \frac{1}{T_2} \bullet \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = \qquad (2.686)$$

$$= \frac{1}{T_2}\left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)\sigma(t), h(0_+) = 0, h(+\infty) = \frac{1}{T_2}$$

Răspunsul indicial , reprezentat in fig. 2.107.b se determină cu relaţia

$$w(t) = L^{-1}\left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{T_2 s^2 (T_1 s + 1)} \right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{1}{T_2 s^2} - \frac{T_1}{T_2 s} + \frac{T_1}{T_2} \bullet \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = \qquad (2.687)$$

$$w(t)=\left[\frac{t}{T_2}-\frac{T_1}{T_2}\left(1-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]\sigma(t)\,, \qquad (2.687)$$

$$w(0_+)=0\,,\; w(+\infty)=\infty$$

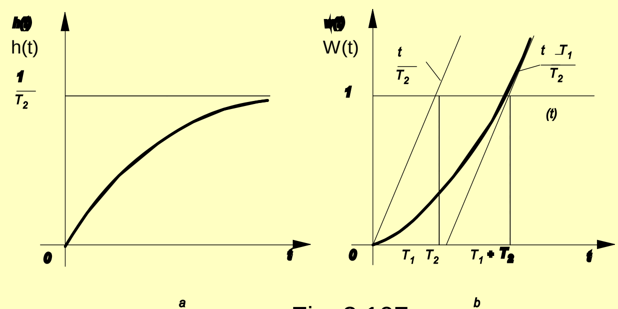



Fig. 2.107

Răspunsul la frecvenţă se obţine din (2.6-85) pentru $s = j\omega$

$$H(j\omega)=\frac{1}{T_2\, j\omega(T_1\, j\omega+1)}=\frac{-T_1\omega-j}{T_2\omega(T_1^2\omega^2+1)}\,, \qquad (2.688)$$

Caracteristicile de frecvenţă sunt

$$H_R(\omega)=-\frac{T_1}{T_2(T_1^2\omega^2+1)}\,;\; H_I(\omega)=\frac{1}{T_2\omega(T_1^2\omega^2+1)}\,;$$
$$M(\omega)=\frac{1}{T_2\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}\,;\; \varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{T_1\omega}\,. \qquad (2.689)$$

Locul de transfer are forma din fig. 2.108

Caracteristica atenuare-frecvenţă are expresia care

$$A_{dB}(\omega)=20\lg\frac{1}{T_2\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} \qquad (2.690)$$

pentru frecvenţe mari are asimptota:

$$A_{dB}=-40\lg\omega-40\lg\sqrt{T_1T_2}\cong-40\lg\omega\,, \qquad (2.691)$$

cu panta de - 40 dB/dec şi care taie axa în punctul $\omega_t=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$

Diagrama Bode este reprezentată în fig. 2.109.

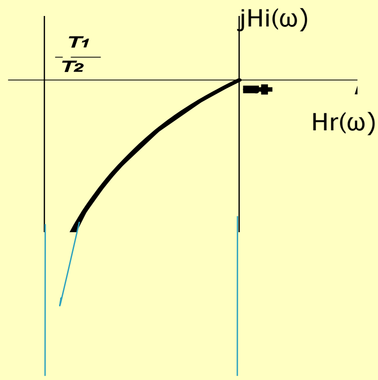



Fig. 2.108

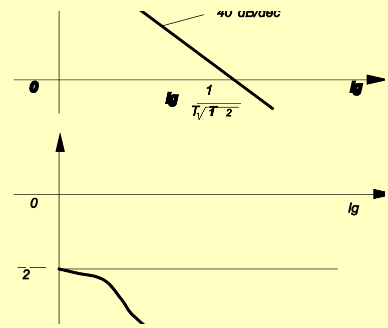



Fig. 2.109

Elemente de tip $IT_1$ sunt toate tipurile de servomomotoare electrice, hidraulice, pneumatice.

Se consideră servomotorul elec-tric *SM* din fig. 2.110 alimentat la o tensiune *u*.
Prin intermediul reductorului mecanic $R_m$, servomotorul *SM* antrenează cursorul unui potenţiometru *P*. Mărimea de ieşire *y* este tensiunea obţinută la cursorul potenţiometrului *P*. Pentru acest sistem se pot scrie următoarele ecuaţii

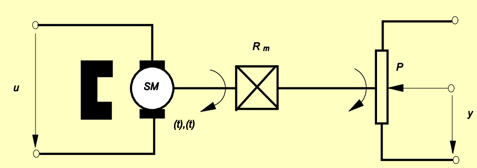



Fig. 2.110

- ecuaţia de mişcare $J\dfrac{d\omega}{dt} = m_m - m_r$

*J* - momentul de inerţie; $m_m = k_1 u(t)$ - cuplul electromagnetic; $m_r = k_2 \omega(t)$ - cuplul rezistent (de frecare) ;

- unghiul de rotaţie al rotorului ; $\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt$

$\alpha = k_3\theta$ , $\alpha$ = deplasarea cursorului potenţiometrului *P*;

$y(t) = k_4\alpha(t)$; $k_1, k_2, k_3, k_4$ - constante de proporţionalitate

Eliminând mărimile intermediare din aceste relaţii se obţine următoarea ecuaţie pentru sistemul analizat

$$J \frac{1}{k_1 k_3 k_4} y^{(2)}(t) + \frac{k_2}{k_1 k_3 k_4} y^{(1)} = u(t). \qquad (2.692)$$

Introducâd constantele de timp $\frac{J}{k_2} = T_1 ; T_2 = \frac{k_2}{k_1 k_3 k_4}$

ecuaţia (2.692) devine

$$T_1 T_2 y^{(2)}(t) + T_2 y^{(1)}(t) = u(t) \qquad (2.694)$$

care este specifică unui element $IT_1$

**2.5.2.9.2. Elementul de întârziere de ordinul 1 cu timp mort**

Este descris de o ecuaţia diferenţială de forma

$$T_1 y^{(1)}(t) + y(t) = k_p u(t - \tau) \qquad (2.695)$$

sau de funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{k_p e^{-s\tau}}{T_1 s + 1} \qquad (2.696)$$

$T_1$, $\tau$, $k_p$ au semnificaţiile prezentate la elementele de întârziere de ordinul *1* şi cu timp mort.

Răspunsul la impuls are expresia

Răspunsul la impuls , reprezentat in fig. 2.111a, are expresia

$$h(t) = L^{-1}\{ H(s) \} = L^{-1}\left\{ \frac{k_p e^{-s\tau}}{T_1\left(s + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} = \frac{k_p}{T_1} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \sigma(t-\tau), t \geq \tau \qquad (2.697)$$

Răspunsul indicial , fig. 2.111b, se determină cu relaţia (2.698) si este reprezentat grafic in fig. 2.111b.

$$w(t) = L^{-1}\left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{k_p e^{-s\tau}}{s(T_1 s + 1)} \right\} = k_p (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}) \sigma(t-\tau) \qquad (2.698)$$

Răspunsul la frecvenţă are expresia

$$H(j\omega) = \frac{k_p e^{-j\omega\tau}}{T_1 j\omega + 1} = \frac{k_p e^{-j\omega\tau}}{1 + j\eta}; \eta = T_1 \omega. \qquad (2.699)$$

Caracteristicile de frecvenţă au expresiile

$$H_R(\omega) = \frac{k_p(\cos\omega\tau - \eta\sin\omega\tau)}{1+\eta^2}; H_I(\omega) = \frac{k_p(\sin\omega\tau - \eta\cos\omega\tau)}{1+\eta^2};$$

$$M(\omega) = \frac{k_p}{\sqrt{1+\eta^2}}; \varphi(\omega) = arg\left(\frac{k_p}{1+j\eta}\right) + arg\left(e^{-j\omega\tau}\right) = -\operatorname{arctg}\eta - \omega\tau. \qquad (2.700)$$

Caracteristica atenuare-frecvenţă , fig. 2.112a, are expresia

$$A_{dB} = 20 \lg \frac{k_p}{\sqrt{1+\eta^2}} \qquad (2.701)$$

cu asimptotele $A_{dB}(\omega) = 20lg\, k_p$ - la frecvenţe joase;
$A_{dB}(\omega) = 20lg\, k_p - 20lg\, \omega$ la frecvenţe înalte.

Locul de transfer a elementului de ordin *1* cu timp mort din fig. 2.112.*b* şi caracteristica fază-frecvenţă, fig. 2.112.*a*, pun în evidenţă variaţia suplimentară a fazei pentru un timp mort $\tau \neq 0$ faţă de cazul când $\tau = 0$.

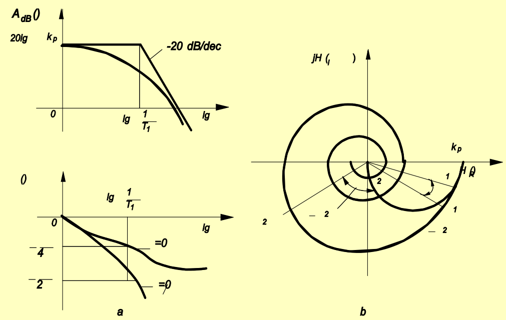


Fig. 2.112

Elementul de ordin *1* cu timp mort se utilizează pentru aproximarea comportării dinamice a numeroase sisteme fizice, deoarece parametrii acestor elemente se pot identifica uşor dacă se cunosc răspunsurile lor indiciale.

## VARIABILE DE STARE. DESCRIEREA INTERNĂ A SISTEMELOR LINIARE

**Metoda variabilelor de stare** constituie o altă modalitate de descriere matematică a comportării sistemelor dinamice monovariabile şi multivariabile, **denumită *descriere internă a sistemelor.*** Aceste sisteme sunt descrise în acest caz de **două seturi de ecuaţii:**

**a) ecuaţii intrare-stare,** care descriu evoluţia mărimilor de stare sub acţiunea mărimilor de intrare. Această evoluţie este complet determinată de **cunoaşterea variabilelor de stare la un moment dat (cunoaşterea condiţiilor iniţiale) şi a mărimilor de intrare;**

**b) ecuaţiile de ieşire,** care descriu evoluţia mărimilor de ieşire sub acţiunea mărimilor de stare.

Metoda variabilelor de stare prezintă următoarele caracteristici principale:

- analiza sistemelor se efectuează în domeniul timpului şi utilizează algebra matricială;
- reprezentarea sistemelor monovariabile se extinde uşor şi la sistemele multivariabile, permiţând o analiză unitară a sistemelor dinamice;
- noţiunile noi de controlabilitate şi observabilitate au un rol important în cadrul acestei metode;
- metoda oferă un instrument puternic pentru rezolvarea problemelor de optimizare;
- anumite sisteme ce prezintă neliniarităţi sau parametri variabili în timp pot să fie tratate prin metoda variabilelor de stare;
- modelele matematice ale sistemelor dinamice reprezentate prin ecuaţii intrare-stare-ieşire permit utilizarea calculatoarelor numerice ca instrumente eficiente pentru analiza şi conducerea acestor sisteme.

**Variabilele de stare sau mărimile de stare** reprezintă un grup de mărimi care **definesc complet starea sistemului** la un moment dat; această stare îndeplineşte rolul unor condiţii iniţiale pentru evoluţia ulterioară a sistemului

Ca **variabile de stare** se aleg de obicei **mărimile ce definesc starea elementelor acumulatoare de energie** dintr-un sistem, ca de exemplu: nivelul pentru un rezervor hidraulic, tensiunea la borne pentru un condensator electric, curentul ce o parcurge pentru o bobină, elongaţia pentru un resort, etc.

### 3.1. Descrierea internă a sistemelor monovariabile

Pentru un **sistem monovariabil continuu sau discret**, descris de o **ecuaţie diferenţială** respectiv de o ecuaţie cu diferenţe de **ordinul *n*, numărul de mărimi de stare necesar pentru definirea stării** sistemului este egal cu ordinul ecuaţiei diferenţiale – ***n* variabile de stare.**

**Alegerea variabilelor de stare nu este unică**, starea unui sistem de ordin *n* poate fi complet definită de **diferite grupuri de *n* variabile de stare alese.**

### 3.1.1. Descrierea internă a sistemelor monovariabile netede

#### 3.1.1.1. Metode bazate pe utilizarea ecuaţiei diferenţiale

##### 3.1.1.1.1 Metoda 1. Variabile de fază. Forma canonică controlabilă

Se consideră un sistem monovariabil neted (continuu în timp) descris de o ecuaţie diferenţială de ordin *n* de forma

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+....+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=u(t) \qquad (3.1)$$

$a_i$ = *constant; i* = $\overline{1,n}$

Ca variabile de stare se aleg: mărimea de ieşire *y(t)* şi primele *(n - 1)* derivate ale acesteia.

Fie variabilele de stare, denumite şi variabile de fază:

$$x_1=y\,,x_2=\dot{x}_1=y^{(1)};x_3=\dot{x}_2=y^{(2)}.....x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}. \qquad (3.2)$$

Din ecuaţia (3.1) se obţine

$$y^{(n)}=\dot{x}_n=-a_{n-1}y^{(n-1)}-...-a_2y^{(2)}-a_1y^{(1)}-a_0y+u(t) \qquad (3.3)$$

$$\dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-...-a_{n-1}x_n+u\,. \qquad (3.4)$$

Cu ecuaţiile (3.2) şi (3.4) pentru ecuaţia diferentială (3.1) se obţine următorul sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul *1* , (3.5)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\\
\dot{x}_2 &= x3\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n\\
\dot{x}_n &= -a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Se adaugă relaţia ecuatiei de iesire:

$$y = x_1 \,. \qquad (3.6)$$

Sub formă matricială relaţiile (3.5) şi (3.6) devin

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad (3.8)$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

unde $A$ = matricea sistemului *(n x n)*; $b$, $c^T$ = vectori constanţi *(n x 1)*, $b$ - vector de intrare, $c^T$ - vector de ieşire, $d$ = constantă.

Pentru ecuaţia (3.1) se asociază ecuaţia caracteristică

$$p^n + a_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots + a_1\, p + a_0 = 0 \,. \qquad (3.9)$$

Se observă că **elementele ultimei linii ale matricei *A*** sunt **coeficienţii ecuaţiei caracteristice (3.9) consideraţi cu semn schimbat.**

În cazul general în ecuaţia diferenţială intervin şi derivatele mărimii de intrare, considerând $m = n$ ecuaţia (3.1) devine

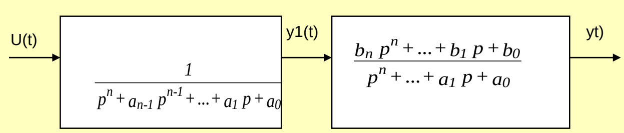
$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\, y^{(1)}(t) + a_0\, y(t) = \\ & = b_n\, u^{(n)}(t) + \ldots + b_1\, u^{(1)}(t) + b_0\, u(t) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Introducând operatorul de derivare $p = d(.)/dt$ ecuaţia (3.10) se poate scrie sub forma

$$y(t)=\frac{b_n p^n+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}u(t)=H(p)u(t)=$$
$$=(b_n p^n+\ldots+b_1 p+b_0)\,y_1(t) \qquad (3.11)$$

$$y_1(t)=\frac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}u(t)$$
$$H(p)=\frac{b_n p^n+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+\ldots+a_1 p+a_0} \qquad (3.12)$$

$H(p)$ coincide cu funcţia de transfer a sistemului (3.10) pentru $p = s$. Relaţiilor (3.11) şi (3.12) le corespunde schema bloc din fig. 3.1.




$$\frac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0} \qquad \frac{b_n p^n+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+\ldots+a_1 p+a_0}$$

Fig. 3.1

Se aleg drept variabile de stare mărimea $y_1(t)$, ce constituie mărimea de ieşire a elementului fictiv *1*, fig. 3.1, şi cele $n - 1$ derivate succesive ale acesteia, adică

$$x_1=y_1\,,x_2=\dot{x}_1=y_1^{(1)},\ldots,x_n=\dot{x}_{n-1}=y_1^{(n-1)} \qquad (3.13)$$

Pentru ecuaţia diferenţială (3.10) corespund ecuaţiile:

$$y_1^{(n)}+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+\ldots+a_1 y_1^{(1)}+a_0 y_1(t)=u(t)$$
$$y(t)=b_n y_1^{(n)}(t)+b_{n-1}y_1^{(n-1)}(t)+\ldots+b_1 y_1^{(1)}(t)+b_0 y_1(t). \qquad (3.14)$$

Ţinând seama de ecuaţiile (3.13) şi (3.14) ecuaţiile de stare şi de ieşire ale sistemului descris de ecuaţia (3.10) devin

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ y_1^{(2)} &= \dot{x}_2 = x_3 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} &= \dot{x}_{n-1} = x_n \\ y_1^{(n)} &= \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + b_{n-1} x_n + b_n \dot{x}_n = \\ &= (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \ldots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u = \\ &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + b_n u \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$c_k = b_{k-1} - b_n a_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}. \quad (3.17)$$

, i –

Pentru sistemul (3.10) ecuaţia matriceală intrare stare este de forma primei ecuaţii (3.7) cu matricea *A* şi vectorul *b* date de (3.8). Ţinând seama de (3.16) şi (3.17) ecuaţia de ieşire devine

$$y(t) = c^T x + b_n u \,;\, c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Ecuaţiile matriceale (3.7), (3.18) definesc **„forma canonică controlabilă"** a ecuaţiei de stare ale unui sistem liniar monovariabil.
Schema bloc a sistemului monovariabil (3.10) corespunzătoare ecuaţiilor (3.15), 3.16) este prezentată în fig. 3.2.

Conditiile initiale $x_i(0)$, $i = \overline{1,n}$ se determină din ecuaţia (3.16) şi a derivatelor acesteia până la ordinul *(n - 1)* în care se înlocuiesc succesiv derivatele variabilelor de stare din (3.15).

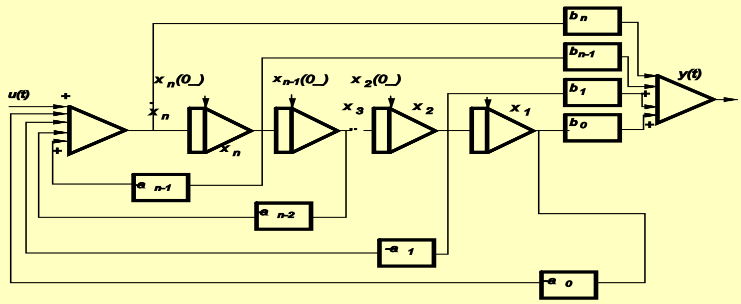



Fig. 3.2

Pentru sistemul descris de ecuaţia (3.10) variabilele de stare $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ nu au o semnificaţie fizică. In cazul utilizării variabilelor de fază starea sistemului nu este definită prin mărimi fizice măsurabile, deci observabile

*Exemplul 3.1.* Fie sistemul de ordinul 2 caracterizat de ecuaţia

$$y^{(2)} + 2\,\xi\,\omega_n\,y^{(1)} + \omega_n^2\,y = \omega_n^2\,u\,. \quad (3.19)$$

Se aleg variabilele de stare

$$x_1(t) = y_1(t)\,;\; x_2 = \dot{x}_1(t),\ iar\ \ y(t) = \omega_n^2\,y_1(t)\,. \qquad (3.20)$$

Din (3.19) şi (3.20) rezultă

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= y_1^{(2)} = -\,\omega_n^2\,y_1 - 2\,\xi\,\omega_n\,y_1^{(1)} = \\ &= -\,\omega_n^2\,x_1(t) - 2\,\xi\,\omega_n\,x_2(t) + u(t)\,;\; y(t) = \omega_n^2\,x_1(t)\,. \end{aligned} \qquad (3.21)$$

Ecuaţiile intrare-stare-ieşire ale sistemului de ordinul 2 sunt deci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\,\omega_n^2\,x_1(t) - 2\,\xi\,\omega_n\,x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= \ \omega_n^2\,x_1(t) \end{aligned}$$

Sub formă matriceală ecuaţiile (3.22) devin

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,;\; y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$