3.1.1.1.2. Metoda 2. Forma canonică observabilă

Fie un sistem liniar continuu descris de o ecuaţie diferenţială, considerând $m = n$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ = b_n u^{(n)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \qquad (3.10)$$

Utilizând operatorul de derivare p această ecuaţie este adusă la forma

$$(y - b_n u)\, p^n + (a_{n-1} y - b_{n-1} u)\, p^{n-1} + \ldots + (a_1 y - b_1 u)\, p + a_0 y - b_0 u = 0. \qquad (3.24)$$

Se introduc următoarele variabile de stare

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - b_n u \\
x_2 &= p(y - b_n u) + a_{n-1} y - b_{n-1} u = p\, x_1 + a_{n-1} y - b_{n-1} u \\
x_3 &= p^2 (y - b_n u) + p(a_{n-1} y - b_{n-1} u) + a_{n-2} y - b_{n-2} u = \\
&= p\, x_2 + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\
&\;\vdots \\
x_{k+1} &= p^k (y - b_n u) + p^{k-1}(a_{n-1} y - b_{n-1} u) + a_{n-k+1} y - b_{n-k+1} u = \\
&= p\, x_k + a_{n-k+1} y - b_{n-k+1} u \\
&\;\vdots \qquad (3.25) \\
x_n &= p^{n-1}(y - b_n u) + p^{n-2}(a_{n-1} y - b_{n-1} u) + \ldots + \\
&+ p(a_2 y - b_2 u) + a_1 y - b_1 u = \\
&= p\, x_{n-1} + a_1 y - b_1 u
\end{aligned}$$

Derivând ultima relaţie (3.25) şi ţinând seama de (3.24) se obţine

$$p\,x_n = -(a_0 y - b_0 u). \qquad (3.26)$$

Din prima ecuaţie (3.25) rezultă

$$y = x_1 + b_n u \qquad (3.27)$$

care se înlocuieşte în ecuaţiile (3.25), (3.26), care devin

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x}_1 + a_{n-1} x_1 - (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) u \\ x_3 &= \dot{x}_2 + a_{n-2} x_1 - (b_{n-2} - a_{n-2} b_n) u \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} + a_1 x_1 - (b_1 - a_1 b_n) u \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 + (b_0 - a_0 b_n) u\,. \end{aligned} \qquad (3.28)$$

Se introduc notaţiile

$$\beta_k = (b_{n-k} - a_{n-k} b_n),\ k = 1,2,\ldots,n\,;\ \beta_0 = b_n \qquad (3.29)$$

şi ecuaţiile (3.28), separând derivatele $\dot{x}_k,\ k = \overline{1,n}$ se scriu în forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_{n-1} x_1 + x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= -a_{n-2} x_1 + x_3 + \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_k &= -a_{n-k} x_1 + x_{k+1} + \beta_k u \\ \dot{x}_{n-1} &= -a_1 x_1 + x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 + \beta_n u \end{aligned} \qquad (3.30)$$

iar ecuaţia ieşirii (3.27) devine

$$y = x_1 + \beta_0 u \qquad (3.31)$$

Din ecuaţiile (3.30) şi (3.31) se obţin ecuaţiile sistemului în formă vectorial-matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_k \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ -a_{n-k} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_k \\ \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \qquad (3.32)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0][x_1 \quad x_2 \quad . \quad . \quad . \quad x_k \quad . \quad . \quad x_n]^T + \beta_0 u \qquad (3.33)$$

de unde rezultă imediat matricea A şi vectorii b, c^T .

Ecuaţiile matriceale (3.32), (3.33) **definesc *forma canonică observabilă*** a ecuaţiilor de stare ale unui sistem liniar monovariabil continuu.

Pentru sistemul descris de ecuaţiile (3.30), (3.31) corespunde schema bloc din fig. 3.3.

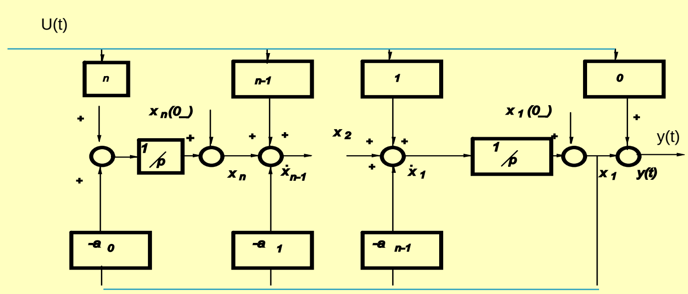

Fig. 3.3

Condiţiile iniţiale $x_1(0\_)$, $x_2(0\_)$,..., $x_n(0\_)$ se determină în funcţie de valorile $y(0\_)$, $y^{(1)}(0\_)$,..., $y^{(n-1)}(0\_)$ şi $u(0\_)$, $u^{(1)}(0\_)$, ..., $u^{(n-1)}(0\_)$ utilizând ecuaţiile (3.25).

3.1.1.2. Metode bazate pe utilizarea funcţiei de transfer

Se consideră sistemul descris de funcţia de transfer

$$H(s)=\frac{b_n s^n+...+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}=\frac{b_n s^n+...+b_1 s+b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)...(s-\lambda_n)}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice (ale numitorului funcţiei de transfer *H(s)*)

În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice care pot fi: *a*) reale simple; *b*) reale multiple; *c*) complex conjugate simple; *d*) complex conjugate multiple, se pot defini variabilele de stare canonice în mod diferit.

a) Cazul rădăcinilor reale simple

În transformate Laplace ecuaţia de transfer (3.11) se scrie astfel

$$Y(s)=H(s)U(s)=\frac{b_n s^n+...+b_1 s+b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)...(s-\lambda_n)}U(s)=$$

$$=c_0 U(s)+\frac{c_1 U(s)}{s-\lambda_1}+\frac{c_2 U(s)}{s-\lambda_2}+...+\frac{c_n U(s)}{s-\lambda_n} \qquad (3.35)$$

unde $c_0=\lim_{s\to\infty} H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{b_n s^n+...+b_1 s+b_0}{s^n+...+a_1 s+a_0}=b_n\,;\, c_i=(s-\lambda_i)H(s)|_{s=\lambda_i}$ (3.36)

Relaţia (3.35) se poate prezenta prin următoarea schemă bloc ca în fig. 3.4. Se consideră ca variabile de stare mărimile de ieşire ale blocuri-lor *1, 2,..., k,..., n,* fig. 3.4 si se scrie:

$$X_k(s)=\frac{1}{s-\lambda_k}U(s), k=1,2,...,n \qquad (3.37)$$

sau în domeniul timpului

$$\dot{x}_k=\lambda_k x_k+u(t), k=\overline{1,n} \qquad (3.38)$$

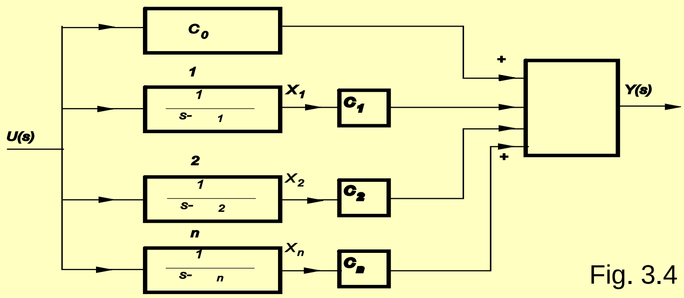

Fig. 3.4

Relaţiile (3.38) reprezintă un ansamblu de *n* ecuaţii de stare. La aceste ecuaţii se adaugă ecuaţia de ieşire, care se obţine din (3.35), Ţinând seama de (3.37) şi aplicând transformata Laplace inversă

$$y(t) = c_0\, u(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t)\,. \qquad (3.39)$$

Ecuaţiile (3.38), (3.39) se scriu sub formă matricială

$$\dot{x} = \Lambda\, x + b\, u$$
$$y = c^T\, x + c_0\, u \qquad (3.40)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [\; c_1,\;\; c_2,\;\; \ldots,\;\; c_n\;]. \qquad (3.41)$$

Se observă că matricea de evoluţie a sistemului *Λ* este o matrice diagonală, a căror elemente de pe diagonala principală sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice (sau polii funcţiei de transfer). În această situaţie variabilele de stare sunt complet decuplate.

Forma matriceală (3.40) poartă denumirea de *formă canonică diagonală* . Pentru integrarea ecuaţiilor (3.38) sunt necesare condiţiile iniţiale $x_k(0),\ k=\overline{1,n}$

Acestea se determină cu ajutorul relaţiei (3.39) şi a derivatelor ei până la ordinul *(n-1)* în care se elimină de fiecare dată x_k cu expresia din relaţia (3.38). Se obţine astfel un sistem de *n* ecuaţii cu *n* necunoscute.
Pe baza relaţiilor (3.38), (3.39), se obţine schema de modelare analogică a sistemului analizat prezentată în fig. 3.5

b) Cazul rădăcinilor reale multiple

Dacă o rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3.34), de exemplu λ_1, este de multiplicitate *k*, atunci relaţia (3.35) care exprimă mărimea de ieşire se poate scrie astfel

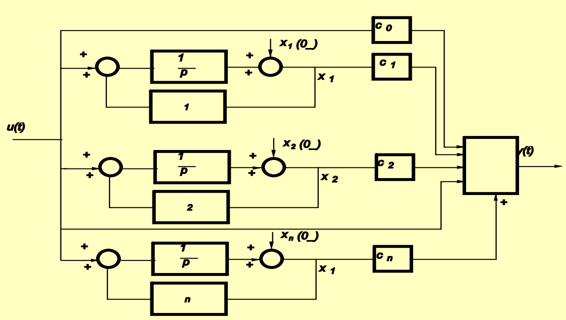

Fig. 3.5

$$Y(s)=\frac{b_n s^n+\ldots+b_1 s+b_0}{(s-\lambda_1)^k(s-\lambda_{k+1})(s-\lambda_{k+2})\ldots(s-\lambda_n)}U(s)=H(s)U(s). \qquad (3.42)$$

$$Y(s)=\left[\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^k}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_k}{s-\lambda_1}+\frac{c_{k+1}}{s-\lambda_{k+1}}+\frac{c_{k+2}}{s-\lambda_{k+2}}+\ldots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]U(s)+$$
$$+c_0U(s)$$

(3.43)

Relaţiei (3.43) îi corespunde schema bloc din fig. 3.6.

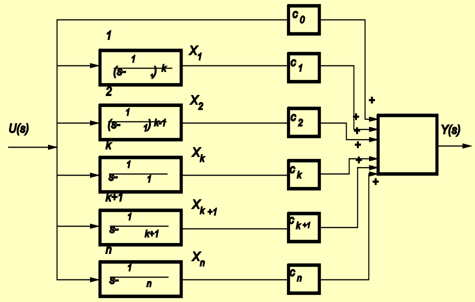

Fig. 3.6

Această schemă poate fi transformată ca în fig. 3.7.

Se aleg ca variabile de stare mărimile de ieşire ale blocurilor *1, 2, 3,..., n* , aşa cum rezultă din fig. 3.7, pentru care se pot scrie relaţiile

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} X_2(s) \\
X_2(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} X_3(s) \\
&\vdots \\
X_{k-1}(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} X_k(s)
\end{aligned}
\qquad (3.45)
$$

$$
\begin{aligned}
X_k(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} U(s) \\
X_{k+1}(s) &= \frac{1}{s-\lambda_{k+1}} U(s) \\
&\vdots \\
X_n(s) &= \frac{1}{s-\lambda_n} U(s)
\end{aligned}
\qquad (3.46)
$$

Din relaţia (3.45) rezultă în domeniul timpului ecuaţiile de stare . Ecuaţia de ieşire se obţine din (3.43).

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \lambda_1\, x_1(t) + x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \lambda_1\, x_2(t) + x_3(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_{k-1}(t) &= \lambda_1\, x_{k-1}(t) + x_k(t)\\
\dot{x}_k(t) &= \lambda_1\, x_k(t) + u(t)\\
\dot{x}_{k+1}(t) &= \lambda_{k+1}\, x_{k+1}(t) + u(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= \lambda_n\, x_n + u(t)
\end{aligned}
$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t) + c_0\, u(t). \qquad (3.47)$$

În formă vectorial-matriceală, ecuatiile intrare-stare-ieşire (3.46),(3.47) devin (3.48), (3.49), sau compact (3.50).

Se observă că

a) matricea de evoluţie este o *matrice Jordan*, notată cu *J*, care conţine un *bloc Jordan* de ordin *k*, delimitat cu linie întreruptă în relaţia (3.48) şi *n-k* blocuri Jordan de ordinul *1* ($J_{k+1} = \lambda_{k+1}, \ldots, J_n = \lambda_n$);

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \cdots\\ \dot{x}_{k-1}\\ \dot{x}_k\\ -\\ \dot{x}_{k+1}\\ \cdots\\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & \cdots & 0 & 0\\
- & - & - & - & - & - & - & - & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & \lambda_{k+1} & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \cdots\\ x_{k-1}\\ x_k\\ \\ x_{k+1}\\ \cdots\\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \cdots\\ 0\\ 1\\ \\ 1\\ \cdots\\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (3.48)
$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T + c_0 u(t) \qquad (3.49)$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= J\, x + b\, u\\
y &= c^T\, x + c_0\, u\,.
\end{aligned} \qquad (3.50)
$$

b) blocul Jordan de ordin *k* evidenţiază cuplajul intrinsec existent între variabilele de stare corespunzătoare rădăcinii multiple λ_1 ;
c) vectorul *b* conţine cifra *1* pentru rădăcinile simple; pentru rădăcina multiplă de ordin *k* corespund *(k-1)* zerouri şi o valoare egală cu *1* în linia *k*.
Pentru integrarea ecuaţiilor (3.46) condiţiile iniţiale $x(0_-)$ se determină ca în punctul *a)*.
Forma (3.48), (3.49) a ecuaţiilor de stare se numeşte *formă canonică Jordan.*

3.1.2.Descrierea interna a sistemelor monovariabile liniare discrete

În **spatiul starilor sistemele dinamice discrete** sunt descrise de **ecuatii matriceale asemanatoare** cu cele ale **sistemelor liniare continue.**

Fie un sistem monovariabil liniar discret descris de ecuatia cu diferente generala

$$\begin{aligned} & y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1y(k+1)+a_0y(k)= \\ & =b_mu(k+m)+b_{m-1}u(k+m-1)+\ldots+b_1u(k+1)+b_0u(k) \end{aligned} \qquad (3.90)$$

cu *n* conditii initiale pentru marimea de iesire, $m \le n$.
Marimea de intrare u(j) este cunoscuta pentru $j \ge 0$.
Functia de transfer în z corespunzatoare sistemului discret descris de ecuatia (3.90) este

$$H(z)=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0}. \qquad (3.91)$$

Pentru **stabilirea ecuatiilor de stare** se utilizeaza **metode bazate pe cunoasterea ecuatiei cu diferente** sau a **functiei de transfer** a sistemelor monovariabile discrete.

3.1.2.1. Metode bazate pe utilizarea ecuatiei cu diferente- Forma canonica controlabila

Fie sistemul dinamic discret descris de ecuatia (3.90) în care *m* = *n*. Se alege o variabila de stare $x_1(k)$ care verifica ecuatia cu diferente

$$x_1(k+n)+a_{n-1}x_1(k+n-1)+\ldots+a_1x_1(k+1)+a_0x_1(k)=u(k). \qquad (3.92)$$

Celelalte variabile de stare se definesc prin relatiile

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k)=x_1(k+1)\\
x_2(k+1) &= x_3(k)=x_1(k+2)\\
&\vdots\\
x_{n-1}(k+1) &= x_n(k)=x_1(k+n-1)\\
x_n(k+1) &= -a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\ldots-a_{n-1}x_n(k)+u(k)=x_1(k+n).
\end{aligned} \qquad (3.93)$$

Utilizând operatorul de deplasare in avans cu un pas, notat cu *q*, definit prin

$$g=q\,f\to\begin{cases} g(k)=f(k+1), & k\ge 0\\ g(k)=0, & k<0\end{cases} \qquad (3.94)$$

ecuatia (3.90) se poate scrie

$$\begin{aligned}
&y(k)\left[q^n+a_{n-1}q^{n-1}+\ldots+a_1q+a_0\right]=\\
&=\left[b_nq^n+b_{n-1}q^{n-1}+\ldots+b_1q+b_0\right]u(k).
\end{aligned} \qquad (3.95)$$

$$y(k)=\frac{b_nq^n+b_{n-1}q^{n-1}+\ldots+b_1q+b_0}{q^n+a_{n-1}q^{n-1}+\ldots+a_1q+a_0}u(k). \qquad (3.96)$$

Din ecuatia (3.92) se obtine

$$x_1(k) = \frac{u(k)}{q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \ldots + a_1 q + a_0}. \quad (3.97)$$

Înlocuind (3.97) în (3.96) se exprima *y(k)* sub forma

$$\begin{aligned} y(k) &= (b_n q^n + b_{n-1} q^{n-1} + \ldots + b_1 q + b_0)\, x_1(k) = \\ &= b_n x_1(k+n) + b_{n-1} x_1(k+n-1) + \ldots + b_1 x_1(k+1) + b_0 x_1(k) = \\ &= b_n x_{n+1}(k) + b_{n-1} x_n(k) + \ldots + b_1 x_2(k) + b_0 x_1(k). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Tinând seama de variabilele de stare definite de (3.93) relatia (3.98) devine

$$\begin{aligned} y(k) &= b_n\left[-a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \ldots - a_{n-1} x_n(k) + u(k)\right] + \\ &+ b_{n-1} x_n(k) + b_{n-2} x_{n-1}(k) + \ldots + b_1 x_2(k) + b_0 x_1(k) = \\ &= c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \ldots + c_n x_n(k) + b_n u(k). \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$c_i = b_{i-1} - b_n a_{i-1}\ ;\ i = 1,..,n\ .$$

Ecuatiile (3.93), (3.99) scrise sub forma matriceala, constituie o forma standard a ecuatiilor de stare numita ***forma canonica controlabila***. Aceste ecuatii sunt

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.100)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & \ldots & x_n(k) \end{bmatrix}^T + b_n u(k) \quad (3.101)$$

sau în forma compacta

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + b_d\, u(k) \quad (3.102)$$

$$y(k) = c^T x(k) + du(k) \quad (3.103)$$

unde A_d este matricea de evolutie de tip $(n \times n)$; b_d - vectorul de intrare $(n \times 1)$; c^T - vectorul de iesire $(n \times 1)$; d = constanta.

Conditiile initiale $x(0)$ se determina din ecuatia de iesire (3.99) cunoscând valorile initiale $y(0), y(1), ..., y(n-1)$ si $u(0), u(1),..., u(m-1)$. În ecuatia de iesire se dau succesiv lui k valorile $0, 1,...,(n-1)$, înlocuind de fiecare data $x_i(k+1)$ prin $x_i(k)$, $i = 1,..,n$ conform relatiilor (3.93). Se obtine astfel un sistem de n ecuatii cu n necunoscute.

În cazul general în care $m < n$, A_d, b_d sunt identice cu cele din expresia (3.100) si $c^T = [b_0\ b_1\ ...\ b_{m-1}\ b_m\ 0\ ...0]$ si $d = b_n = 0$.

Metoda 2. Forma canonica observabila

In ecuatia cu diferente (3.90) a unui sistem monovariabil liniar discret se introduce operatorul de deplasare de avans cu un pas q si obtine

$$q^n(\ y(k) - b_n u(k)) + q^{n-1}[\ a_{n-1} y(k) - b_{n-1} u(k)\ ] + ... +$$
$$+ q\ [\ a_1 y(k) - b_1 u(k)\ ] + a_0 y(k) - b_0 u(k) = 0. \qquad (3.104)$$

Se definesc variabilele de stare astfel

24

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= y(k) - b_n u(k) \\
x_2(k) &= q[y(k) - b_n u(k)] + a_{n-1} y(k) - b_{n-1} u(k) = \\
&= x_1(k+1) + a_{n-1} y(k) - b_{n-1} u(k) \\
x_3(k) &= q^2[y(k) - b_n u(k)] + q[a_{n-1} y(k) - b_{n-1} u(k)] + \\
&+ a_{n-2} y(k) - b_{n-2} u(k) = q\, x_2(k) + a_{n-2} y(k) - b_{n-2} u(k) = \\
&= x_2(k+1) + a_{n-2} y(k) - b_{n-2} u(k) \\
&\ \vdots \\
x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) + a_1 y(k) - b_1 u(k) = \\
&= q^{n-1}[y(k) - b_n u(k)] + q^{n-2}[a_{n-1} y(k) - b_{n-1} u(k)] + a_1 y(k) - b_1 u(k).
\end{aligned} \qquad (3.105)$$

Printr-o deplasare în avans cu un pas în ultima ecuatie (3.105), tinând seama si de ecuatia (3.104) se obtine

$$x_n(k+1) = -a_0\, y(k) + b_0\, u(k). \qquad (3.106)$$

Din prima ecuatie (3.105) se obtine ecuatia de iesire

$$y(k) = x_1(k) + b_n\, u(k). \qquad (3.107)$$

Înlocuind *y(k)* în ecuatiile (3.105), (3.106) se obtine forma standard a ecuatiilor de stare sub forma matriceala, numita *forma canonica observabila* pentru un sistem monovariabil liniar discret. Aceste ecuatii sunt date de relatiile

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u(k) \qquad (3.108)$$

$$y(k) = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]\,[x_1(k) \;\; x_2(k) \;\; \ldots \;\; x_n(k)]^T + b_n\, u(k). \qquad (3.109)$$

Conditiile initiale $x_i(0)$, $i = 1,\ldots,n$, se determina plecând de la conditiile initiale *y(0), y(1), ..., y(n-1)* si *u(0), u(1), ..., u(n-1).* Pentru aceasta se utilizeaza valorile lui *y(k); k =0,…,(n-1)* în ecuatiile (3.105).

Daca $m < n$ atunci A_d si c^T sunt identice cu cele din expresia (3.108) iar $b_d = [0\ 0 \ldots\ b_m\ b_{m-1} \ldots\ b_1\ b_0]$ si $d = 0$ pentru ca $b_n = 0$.

3.1.2.2. Metode bazate pe utilizarea functiei de transfer

O alta modalitate de obtinere a ecuatiilor de stare consta în descompunerea functiei de transfer (3.91) în elemente simple corespunzatoare unor conexiuni paralel sau serie ale acestora.

a) Modelul în paralel

Daca λ_i, $i = 1,\ldots,n$ sunt polii functiei de transfer (3.91) aceasta se poate scrie

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots.(z-\lambda_n)}. \qquad (3.111)$$

H(z) poate fi descompusa într-o suma de *n* elemente simple

$$H(z) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z-\lambda_i}, c_0 = \lim_{z \to \infty} H(z);$$

(3.112)

$$c_i = [\, H(z)(\, z - \lambda_i \,)\,]|_{z=\lambda_i}.$$

Ecuatia transferului intrare-iesire se poate scrie

$$Y(z) = H(z)U(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z-\lambda_i} U(z) + c_0 U(z). \qquad (3.113)$$

Se definesc variabilele de stare

$$X_i(z) = \frac{U(z)}{z-\lambda_i} \qquad (3.114)$$

Ecuatia (3.113) devine

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(z) + c_0 U(z). \qquad (3.115)$$

Ecuatiile (3.114), (3.115) pot fi reprezentate prin schema bloc din fig. 3.15 numita si *modelul paralel* al sistemului liniar monovari-abil discret definit de functia de transfer (3.111).

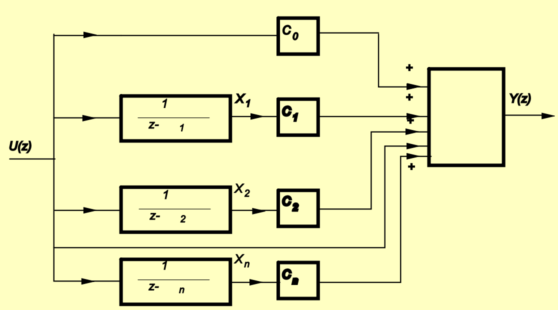

Fig. 3.15

În domeniul timpului ecuatiile (3.114), (3.115) devin

$$x_i(k+1) = \lambda_i x_i(k) + u(k), i = \overline{1,n} \qquad (3.116)$$

$$y(k) = c_0 u(k) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(k). \qquad (3.117)$$

Utilizând operatorul de întârziere cu un pas q^{-1}, ecuatiile (3.116), (3.117) pot fi modelate cu schema bloc din fig. 3.16

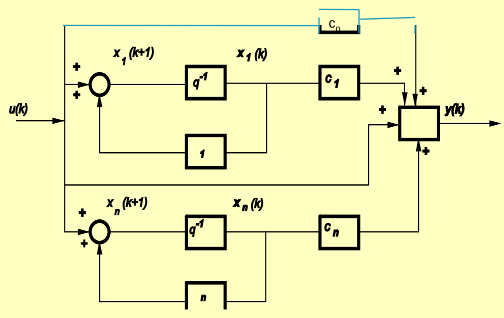

Fig. 3.16

Ecuatiile (3.116), (3.117), sub **forma matriceala**, definesc **forma canonica diagonala a ecuatiilor de stare** ale unui sistem dinamic liniar monovariabil discret.
Aceste ecuatii sunt

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & \ldots & x_n(k) \end{bmatrix}^T + c_0 u(k).$$

(3.119)