3.2.1.4. Ecuaţia neomogenă. Tranziţia intrare-ieşire

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene (3.142) este formată din **două componente**: **o componentă a regimului liber** $x_l(t)$ **-** soluţia ecuaţiei omogene (3.144) corespunzătoare ecuaţiei (3.142) **şi o componentă a regimului forţat** $x_f(t)$ **- soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (3.142).**

Soluţia ecuaţiei omogene se determină cu relaţia (3.167)

$$x_l(t) = \phi(t-\tau,0)\,x(\tau)$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se determină prin metoda variaţiei constantelor. Se scrie

$$x_f(t) = \phi(t-\tau,0)\,q(t)$$

în care $q(t)$ este un vector ce se va determina din condiţia ca $x_f(t)$ din (3.217) să satisfacă ecuaţia (3.142).

$$\dot{x}_f(t) = \dot{\phi}(t-\tau,0)\,q(t) + \phi(t-\tau,0)\,\dot{q}(t) = A\,\phi(t-\tau,0)\,q(t) + B\,u(t).$$

Tinând seama de proprietatile matricei de tranzitie, conform relatiilor (3.172), (3.173) rezulta

$$\dot{x}_f(t) = A\dot{\phi}(t-\tau,0)\,q(t) + \phi(t-\tau,0)\,\dot{q}(t) = A\phi(t-\tau,0)\,q(t) + B\,u(t)$$

$$\dot{q}(t) = \phi^{-1}(t-\tau,0)B\,u(t) = \phi(\tau-t,0)\,B\,u(t)$$

$$q(t) = \int_{\tau}^{t} \phi(\tau-\sigma,\,0)Bu(\sigma)\,d\sigma. \qquad (3.218)$$

Înlocuind (3.218) în (3.217) se obtine solutia regimului fortat

$$x_f(t) = \phi(t-\tau,\,0)\int_{\tau}^{t}\phi(\tau-\sigma,\,0)B\,u(\sigma)\,d\sigma = \int_{\tau}^{t}\phi(t-\sigma,\,0)B\,u(\sigma)\,d\sigma. \qquad (3.219)$$

Solutia generala a ecuatiei (3.142) va fi de forma (3.220), **numita formula variatiei constantelor**.

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = \phi(t-\tau,0)x(\tau) + \int_\tau^t \phi(t-\sigma,0)Bu(\sigma)d\sigma. \quad (3.220)$$

Daca se utilizeaza expresia (3.161) a matricei de tranzitie, solutia (3.220) a ecuatiei neomogene se poate scrie

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma. \quad (3.221)$$

Înlocuind *x(t)* din (3.220) sau (3.221) în ecuatia de iesire (3.143) se obtin relatiile care **exprima tranzitia intrare-iesire.**

$$y(t) = C[\phi(t-\tau,0)x(\tau) + \int_\tau^t \phi(t-\sigma,0)Bu(\sigma)d\sigma] + Du(t). \quad (3.222)$$

$$y(t) = C[e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma] + Du(t). \quad (3.223)$$

Daca **momentul initial este *τ = 0*** si în plus $x(0_+) = 0$, **conditiile initiale sunt nule**, relatiile (3.221), (3.223) devin

$$x(t) = \int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \quad (3.224)$$

$$y(t) = C\int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma + Du(t) \quad (3.225)$$

Expresiile (3.220), (3.221) si (3.222), (3.223) furnizeaza vectorul de stare si respectiv vectorul de iesire al sistemului pentru orice $t \geq \tau \geq 0$ plecând dintr-o stare initiala arbitrara *x(τ)*, pentru o marime *u(t)* aplicata la intrare pe intervalul [*τ*,*t*].

Relatiile (3.220) - (3.225) ramân valabile si pentru sistemele monovariabile descrise în limbaj intrare-stare-iesire, matricele *B* si *C* fiind înlocuite cu vectorii *b* si c^T iar matricea *D* cu constanta *d*, adica

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma)d\sigma \quad (3.226)$$

$$y)t) = c^T[e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma)d\sigma] + du(t). \quad (3.227)$$

3.2.1.5. Matricea de raspuns la impuls.

Se considera un sistem monovariabil propriu *(d = 0)*.
Se presupune *τ = 0* si *x(0)* (conditii initiale nule). Atunci din (3.226), (3.227) rezulta

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} b\, u(\sigma)\, d\sigma \tag{3.228}$$

$$y(t) = c^T \int_0^t e^{A(t-\sigma)} b\, u(\sigma)\, d\sigma . \tag{3.229}$$

Daca marimea de intrare *u(t)* este impulsul Dirac *δ(t)* se stie ca

$$\int_0^t f(\sigma)\delta(\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\delta(\sigma)\, d\sigma = f(0) \tag{3.230}$$

Se noteaza cu *h(t)* raspunsul sistemului *y(t)* obtinut în aceste conditii. Din (3.229) rezulta

$$h(t) = c^T e^{At} b \tag{3.231}$$

În cazul sistemelor multivariabile proprii *(D = 0)*, se considera ca vectorul de intrare are toate componentele egale cu impulsul Dirac

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) = \mathbf{1}\delta(t) \tag{3.232}$$

unde **1** este un vector $\in \mathbf{R}^m$ *cu componente unitare.*
Înlocuind (3.232) în (3.225) se obtine **matricea raspunsului la impuls,** de dimensiune pxm

$$h(t) = Ce^{At} B . \tag{3.233}$$

Coloana de indice *i* a lui *h(t)* se determina aplicând un **impuls Dirac *δ(t)* la intrarea *$u_i(t)$***, celelalte intrari fiind nule, si observând **evolutia iesirilor *$y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_p(t)$***.

3.2.1.6. Matricea de transfer

Aplicând transformata Laplace directă, pentru condiţii iniţiale nule $x(0) = 0,\ \tau = 0$ în ecuaţiile (3.142), (3.143) se obţine

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \qquad (3.234)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s) = H(s)U(s). \qquad (3.235)$$

Ecuaţia (3.235) se obţine şi direct din relaţia (3.225) în care se aplică transformata Laplace. **Matricea *H(s)*** de dimensiuni *p x m* evidenţiată în ecuaţia de ieşire (3.235), se numeste **matrice de transfer**, definită prin expresia

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \qquad (3.236)$$

Elementele matricei de transfer *H(s)* sunt fracţii raţionale în *s* cu numitorul de grad *n* şi numărătorul de grad $m \le n$.
Matricea de transfer *H(s)* este transformata Laplace a matricei de răspuns la impuls

$$H(s) = L\{h(t)\} = C(sI - A)^{-1} B + D = L\left\{ Ce^{At} B + D\delta(t) \right\} \qquad (3.237)$$

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = Ce^{At} B\sigma(t) + D\delta(t).$$

Observaţie: În cazul sistemelor monovariabile matricea de transfer se reduce la funcţia de transfer. În acest caz (3.236) devine

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d. \qquad (3.238)$$

Exemplul 3.10. Se consideră sistemul dinamic liniar multivariabil constant, definit de ecuaţiile

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Să se calculeze **matricea de transfer şi matricea de răspuns la impuls** ale acestui sistem. **Se calculează $(sI - A)^{-1}$** aplicând algoritmul Leverrier--Fadeev, pentru $n = 2$. Se scrie

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(s)}\left[B_1 s+B_0\right]=\frac{1}{s^2-3s+2}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{s^2-3s+2}\begin{bmatrix}s+1 & 6\\ -1 & s-4\end{bmatrix}$$

$$B_1=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\alpha_1=-tr\,(AB_1)=-tr\begin{bmatrix}4 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}=-3$$

$$B_0=A\,B_1+I\,\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix},\alpha_0=-\frac{1}{2}tr(AB_0)=-\frac{1}{2}tr\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=2$$

Matricea de răspuns la impuls se calculează cu relaţia (3.237.*b*)

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s^2-3s+2} & \frac{-6}{s^2-3s+2}\\ \frac{s+2}{s^2-3s+2} & \frac{s-10}{s^2-3s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}-2e^{t}+3e^{2t} & 6e^{t}-6e^{2t}\\ -3e^{t}+4e^{2t} & 9e^{t}-8e^{2t}\end{bmatrix}$$

3.2.1.7. Transformări liniare în spaţiul stărilor. Echivalenţa sistemelor dinamice.

Ecuaţia omogenă (3.144) exprimă o **transformare liniară a spaţiului stărilor *X* în el însuşi.** *A* este matricea acestei transfor-mări. Vectorii x si sunt exprimaţi în aceeaşi bază de vectori din ***X***. Dar spaţiul stărilor ***X*** admite o infinitate de baze de vectori, toate legate între ele prin transformări liniare nesingulare. **Schimbarea bazei de vectori din *X* este echivalentă cu o transformare liniară operată asupra vectorului de stare .**

Fie *P* o matrice *(n x n)* nesingulară care defineşte o transformare a vectorului de stare sub forma x

$$\tilde{x} = Px \ , \ \det P \neq 0 \qquad (3.239)$$

unde $\tilde{x}$ este noul vector de stare. Din (3.239) rezulta

$$x = P^{-1}\tilde{x} \, . \qquad (2.340)$$

Daca în ecuatiile intrare-stare-iesire (3.142), (3.143) ale sistemului dinamic liniar constant se înlocuieste *x* din (3.240) acestea devin

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}\,u \qquad (2.341)$$

$$y = \tilde{C}\,\tilde{x} + \tilde{D}\,u \qquad (2.342)$$

în care

$$\tilde{A} = PAP^{-1}$$
$$\tilde{B} = PB \qquad (2.343)$$
$$\tilde{C} = CP^{-1}$$
$$\tilde{D} = D$$

Definitia 3.1. **Doua sisteme dinamice** *(A,B,C,D)* si $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D})$ se numesc **echivalente,** notându-se $(A,B,C,D) \sim (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D})$, daca exista o **matrice nesingulara** ***P*** astfel încât au loc relatiile (3.243).

Se verifica usor ca ~ este o relatie de echivalenta, adica este reflexiva, simetrica si tranzitiva. Se constata de asemenea ca doua sisteme echivalente au aceeasi dimensiune.

Sistemele dinamice liniare invariante echivalente sunt caracterizate prin **invarianta polinomului caracteristic**, a **matricelor de transfer, de raspuns la impuls si a raspunsului liber** la transformarile liniare nesingulare ale vectorului de stare.

Se considera polinoamele caracteristice ale doua sisteme echivalente. Sa se arate ca cele doua polinoame sunt identice.

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \qquad \tilde{\Delta}(s) = \det(sI - \tilde{A}). \qquad (3.245)$$

Astfel

$$\tilde{\Delta}(s) \equiv \det(sI - \tilde{A}) \equiv \det(sI - PAP^{-1}) \equiv$$
$$\equiv \det(PP^{-1}s - PAP^{-1}) \equiv \det P(sI - A)P^{-1} \equiv \qquad (3.246)$$
$$\equiv \det P \, x \det(sI - A) \, x \det P^{-1} \equiv \Delta(s).$$

Din (3.246) rezulta ca sistemele dinamice echivalente au aceeasi ecuatie caracteristica si deci aceleasi valori proprii.

Fie *H(s)* si $\tilde{H}(s)$ matricile de transfer a doua sisteme echivalente

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad \tilde{H}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}. \qquad (3.248)$$

Utilizând relatiile (3.243) se arata ca matricile de transfer *H(s)* si $\tilde{H}(s)$ sunt identice.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Astfel

$$\tilde{H}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \equiv CP^{-1}(PP^{-1}s - PAP^{-1})^{-1}PB + D \equiv$$
$$\equiv CP^{-1}P(sI - A)^{-1}P^{-1}PB + D \equiv C(sI - A)^{-1}B + D \equiv H(s) \qquad (3.249)$$

În (3.249) s-a utilizat urmatorul rezultat din calculul matriceal,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (3.250)$$

Din (3.249) rezulta ca **sistemele dinamice echivalente** au **aceeasi matrice de transfer**.

Deoarece **matricea de raspuns la impuls *h(t)*** este **transformata Laplace inversa a matricei de transfer din** (3.249) rezulta si **invarianta matricei de raspuns la impuls** a sistemelor dinamice echivalente. Deci

$$h(t) \equiv Ce^{At}B\sigma(t) + D\delta(t) \equiv \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B}\sigma(t) + D\delta(t) \equiv \tilde{h}(t). \qquad (3.251)$$

Raspunsurile libere ale sistemelor dinamice echivalente sunt exprimate de relatiile

$$y_i(t) = Cx_\ell(t) = Ce^{A(t-\tau)}x(\tau) \qquad \tilde{y}_\ell(t) = \tilde{C}\tilde{x}_\ell(t) = \tilde{C}e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{x}(\tau). \qquad (3.253)$$

Tinând seama de relatiile (3.216), (3.239), (3.243) din (3.253) se obtine

$$\tilde{y}_\ell(t) = \tilde{C}\,\tilde{x}_\ell(t) = \tilde{C}\,e^{\tilde{A}(t-\tau)}\,\tilde{x}(\tau) \equiv CP^{-1}\,e^{PAP^{-1}(t-\tau)}\,Px(\tau) \equiv$$
$$\equiv CP^{-1}\,Pe^{A(t-\tau)}\,P^{-1}P\,x(\tau) = C\,e^{A(t-\tau)}\,x(\tau) = y_\ell(t) \qquad (3.254)$$

Din (3.254) rezulta ca sistemele dinamice echivalente au **raspunsuri libere identice**.
Proprietatile de invarianta ale sistemelor dinamice echivalente conduc la urmatoarea concluzie importanta: **alegerea vectorului de stare pentru un sistem dinamic liniar constant este arbitrara**; oricare ar fi alegerea vectorului de stare **tranzitia cauzala „intrare-iesire”** este independenta de alegerea respectiva.

3.2.2. Sisteme multivariabile discrete

3.2.2.1. Ecuatii vectorial matriceale de stare ale sistemelor multivariabile discrete

Un sistem multivariabil discret invariant în timp este descris prin ecuatii vectorial-matriceale de stare de forma

$$x(k+1) = A_d\,x(k) + B_d\,u(k) \ - \ \textit{ecuatia de stare cu diferente} \qquad (3.295)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \ - \ \textit{ecuatia iesirii} \qquad (3.296)$$
$$x(k_0) \ - \ \textit{conditia initiala}$$

cu *x(k)* - vector de stare *(n x 1)*; *u(k)* - vector de intrare *(m x 1)*; *y(k)* - vector de iesire , *(p x 1)*; A_d - matricea de stare, *(n x n)*; B_d - matricea de intrare *(n x m)*; *C* - matricea de iesire *(p x n)*; *D* - matricea de cuplaj intrare-iesire *(p x m)*; $x(k_0)$ - vectorul conditiilor initiale ale starilor sistemului.
La sistemele « proprii », nu exista cuplaj direct intrare-iesire, matricea D=0.

Ecuatiile (3.295), (3.296) se pot reprezenta prin schema bloc din fig. 3.21, în care $u_i(k)$, $x_j(k)$, $y_l(k)$ corespund respectiv evolutiei unei intrari, a unei stari sau a unei iesiri oarecare.

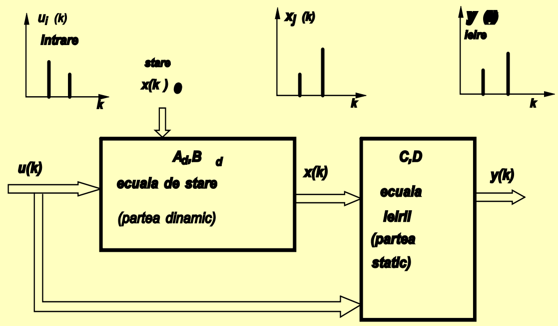

Fig. 3.21

3.2.2.2. Solutia ecuatiei de stare. Matricea de tranzitie

Se presupune ca se cunoaste vectorul de stare al conditiilor initiale $x(k_0)$. Din ecuatia de stare (3.295) se determina succesiv

$$x(k_0+1)=A_d\,x(k_0)+B_d\,u(k_0)$$

$$x(k_0+2)=A_d\,x(k_0+1)+B_d\,u(k_0+1)=A_d^2\,x(k_0)+A_d\,B_d\,u(k_0)+B_d\,u(k_0+1)$$

$$x(k_0+3)=A_d^3\,x(k_0)+A_d^2\,B_d\,u(k_0)+A_d\,B_d\,u(k_0+1)+B_d\,u(k_0+2)$$

$$\vdots \tag{3.297}$$

$$x(k_0+i)=A_d^i\,x(k_0)+A_d^{i-1}\,B_d\,u(k_0)+\ldots+A_d\,B_d\,u(k_0+i-2)+B_d\,u(k_0+i-1).$$

Notând $k_0 + i = k$ din ultima relatie (3.297) rezulta

$$x(k)=A_d^{k-k_0}\,x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}A_d^{k-i-1}\,B_d\,u(i),\; k\geq k_0 \tag{3.298}$$

sau

$$x(k)=A_d^{k-k_0}\,x(k_0)+\sum_{j=1}^{k-k_0}A_d^{j-1}\,B_d\,u(k-j) \tag{3.299}$$

Relatia (3.298) (sau (3.299)) reprezinta solutia ecuatiei de stare cu diferente si cuprinde doi termeni: **primul corespunde solutiei ecuatiei omogene - co**mponenta libera determinata de conditiile initiale $x(k_0)$;

al doilea termen reprezinta **solutia particulara a ecuatiei neomogene - componenta fortata determinata de marimea de intrare *u(k)*.**

Matricea A_d^{k-k0} constituie **matricea de tranzitie a sistemului** discret si are urmatoarele **proprietati**

$$\phi(k,k_0)=\phi(k-k_0,0)=A_d^{k-k_0};\phi(k,0)=A_d^{k}=\phi(k);\phi(0,0)=$$
$$=A_d^{0}=I;\phi(k_2,k_1)\phi(k_1,k_0)=\phi(k_2,k_0);A_d^{k_2-k_1}\,x\,A_d^{k_1-k_0}=A_d^{k_2-k_0} \quad (3.300)$$

3.2.2.3. Tranzitia intrare-iesire. Matricea de raspuns la impuls. Matricea de transfer

Înlocuind vectorul de stare *x(k)* din relatia (3.298) în ecuatia iesirii (3.296) se obtine

$$y(k)=C\,[\,A_d^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}A_d^{k-1-i}B_d\,u(i)\,]+D\,u(k)=$$
$$=C\,[\,\phi(k-k_0,0)\,x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}\phi(k-1-i,0)\,B_d\,u(i)\,]+D\,u(k)\quad k\geq k_0 \quad (3.301)$$

Relatia (3.301) exprima tranzitia intrare-iesire a unui sistem multivariabil discret. În sistemelor monovariabile ecuatiile (3.295) - (3.301) ramân valabile, matricele B_d ,*C* si D se inlocuiesc cu vectorii b_d, c^T , espectiv cu marimea scalara *d*.

Pentru un sistem monovariabil discret propriu *(d = 0)*, considerand $k_0 = 0$ si $x(k_0) = 0$ relatiile (3.298), (3.301) devin

$$x(k)=\sum_{i=0}^{k-1}A_d^{k-1-i}b_d\,u(i)=\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k-1-i,\,0)\;b_d\;u(i) \quad (3.302)$$

$$y(k)=c^T\sum_{i=0}^{k-1}A_d^{k-1-i}\;b_d\;u(i)=c^T\sum_{i=0}^{k-1}\phi(k-1-i,\,0)\;b_d\;u(i). \quad (3.303)$$

Daca marimea de intrare este impulsul unitar discret

$$u(0)=\delta(0)=1$$
$$u(k)=\delta(k)=0\,,\;\;k\geq 1 \quad (3.304)$$

atunci marimea de iesire *y(k)* se numeste *raspunsul la impuls al sistemului,* sau *secventa de ponderare*, notat cu *h(k)*. Din (3.303) se obtine

$$h(k) = c^T \; A_d^{k-1} \; b_d = c^T \; \phi(k-1,\, 0) \; b_d \qquad (3.305)$$

În cazul sistemelor multivariabile proprii *(D = 0)*, când vectorul marimilor de intrare de dimensiune *m x 1* are toate componentele egale cu impulsul unitar discret

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \delta(k) \qquad (3.306)$$

ecuatia iesirii (3.301) pentru $k_0 = 0$, $x(k_0) = 0$ devine

$$y(k) = h(k) = C \; A_d^{k-1} B_d = C \; \phi(k-1,\, 0) \; B_d \,. \qquad (3.307)$$

Relatia (3.307) defineste **matricea de raspuns la impuls** *h(k)* al sistemului, sau **matricea de ponderare**, de dimensiuni *(p x m)*.

Aplicând transformata *Z* în ecuatiile intrare-stare-iesire (3.295), (3.296) se obtine

$$z(X(z) - x(0)) = A_d \, X(z) + B_d U(z) \qquad (3.308)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \qquad (3.309)$$

Din relatia (3.308) se obtine transformata *Z* a solutiei ecuatiei neomogene de stare

$$X(z) = (z\,I - A_d\,)^{-1} \, z \;\; x(0) + (zI - A_d\,)^{-1} \;\; B_d \;\; U(z)\,. \qquad (3.310)$$

unde *x(0)* este valoarea initiala a vectorului de stare.

În cazul în care *U(z) = 0, (u(k) = 0*, sistemul este izolat fata de intrari) din (3.310) se obtine

$$X(z) = (zI - A_d)^{-1} z\, x(0) = \phi(z)\, x(0) = X_l(z) \quad (3.311)$$

care este transformata *Z* a solutiei ecuatiei omogene corespunzatoare ecuatiei de stare (3.295).

Matricea $$z(zI - A_d)^{-1} = \phi(z) \quad (3.312)$$

este transformata *Z* a matricei de tranzitie a sistemului liniar discret

$$\phi(z) = Z\{\phi(k,0)\} = Z\{\phi(k)\} \quad (3.313)$$

Matricea *Φ(z)* se poate exprima prin seria

$$\phi(z) = \phi(0) + z^{-1}\phi(1) + z^{-2}\phi(2) + \ldots = \quad (3.314)$$

$$= I + z^{-1} A_d + z^{-2} A_d^2 + \ldots = z(zI - A_d)^{-1},\ |z| > 1$$

Pentru conditii initiale nule, *x(0) = 0,* $k_0 = 0$ din ecuatia (3.310) se obtine **transformata *Z* a componentei fortate a functiei de tranzitie a starilor**

$$X(z) = X_f(z) = (zI - A_d)^{-1} B_d U(z) \quad (3.315)$$

a carei original, tinând seama si de (3.312) - (3.314), este

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(k-1-i,\, 0) B_d u(i). \quad (3.316)$$

Înlocuind *X(z)* din (3.315) în ecuatia iesirii (3.309) se obtine

$$Y(z) = C(zI - A_d)^{-1} B_d U(z) + DU(z) = \left[C(zI - A_d)^{-1} B_d + D\right] U(z) = H(z)U(z) \quad (3.317)$$

În ecuatia (3.317) se pune în evidenta matricea *(p x m)* ***H(z)* care se numeste *matricea de transfer discreta*** *a sistemului multivariabil*

$$H(z) = C\,(z\,I - A_d\,)^{-1}\;B_d + D\,. \qquad (3.318)$$

Matricea de transfer discreta *H(z)* este transformata *Z* a matricei de raspuns la impuls

$$H(z) = Z\left\{\,h(k)\,\right\} = Z\,\left\{CA_d^{k-1}\;B_d + D\,\right\}\;\; sau \qquad (3.319)$$

$$h(k) = Z^{-1}\left\{\,H(z)\,\right\} = Z^{-1}\left\{C\,(zI - A_d\,)^{-1}\;B_d + D\,\right\}$$

Algoritmul Leverrier-Fadeev permite calcularea matricei inverse *(zI - A_d)*$^{-1}$, fara a efectua operatia de inversare a matricei. Se scrie

$$(z\,I - A_d\,)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,(z\,I - A_d)}{\Delta(z)} = \frac{B(z)}{\Delta(z)} \qquad (3.320)$$

$$\Delta(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \qquad (3.321)$$

$$B(z) = B_{n-1}\;z^{n-1} + \ldots + B_1 z + B_0 \qquad (3.322)$$

unde *Δ(z)* este un polinom în *z* de grad *n*, **polinomul caracteristic a**l matricei caracteristice *(zI - A_d), B(z)* este un polinom matriceal.

$$B_{n-1} = I$$

$$\alpha_{n-1} = -\,tr\,(\,A_d\;B_{n-1}\,)$$

$$B_{n-2} = A_d\;B_{n-1} + I\;\alpha_{n-1}$$

$$\alpha_{n-2} = -\,\frac{1}{2}\,tr\,(\,A_d\;B_{n-2}\,)$$

$$\vdots \qquad (3.323)$$

$$B_{n-3} = A_{dB_{n-1}} + I\;\alpha_{n-2}$$

$$\alpha_1 = -\,\frac{1}{n-1}\,tr\,(\,A_d\;B_1\,)$$

$$B_0 = A_d\;B_1 + I\;\alpha_1$$

$$\alpha_0 = -\,\frac{1}{n}\,tr\,(\,A_d\;B_0\,)$$

care se pot scrie si în forma $B_i = A_d\;B_{i+1} + I\,\alpha_{i+1}\,,\;\; i < n-1;\, B_{n-1} = I$

$$\alpha_i = -\,\frac{1}{n-i}\;tr\,(\,A_d\;\;B_i\,)\,,\;\; i \le n-1. \qquad (3.324)$$

3.2.2.4. Sisteme esantionate. Discretizarea sistemelor netede

În fig. 3.22 este prezentat un exemplu de proces continuu comandat prin calculator. **Procesul continuu** este caracterizat de matricele *A, B, C, D*. *CNA* si *CAN* reprezinta **convertorul numeric-analogic si respectiv convertorul analog-numeric**. ER_0 este **elementul de retinere de ordin zero.**

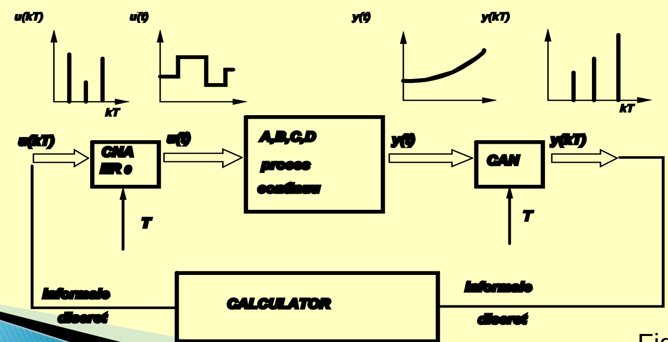

Fig. 3.22

Se cauta relatiile între semnalele discrete în timp „vazute” de calculator, *u(kT)* si *y(kT)*.

Procesul continuu este descris prin ecuatiile de stare (3.142), (3.143)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Marimile la momen-tele *kT* (notate cu *k* pentru usurarea scrierii) satisfac ecuatiile

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + B_d\, u(k) \quad \text{- ecuatia de stare cu diferente} \tag{3.325}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad \text{- ecuatia iesirii} \tag{3.326}$$

Matricele A_d, B_d ale sistemului esantionat depind de matricele *A*, *B* ale sistemului continuu si de perioada de esantionare *T*

$$A_d, B_d = f\ (A, B, T\ ). \tag{3.327}$$

Pentru un sistem continuu descris de ecuatiile (3.142), (3.143), cunoscând starea sa în momentul de esantionare $t_k = kT$, conform relatiei (3.221) se poate determina starea *la momentul de esantionare urmator* $t_{k+1} = (k+1)T$

$$x(t_{k+1}) = x(k+1) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \qquad (3.328)$$

Datorita elementului de retinere de ordin zero plasat la intrarea procesului continuu marimea de intrare *u(t)* este mentinuta con-stanta pe durata perioadei de esantionare *T*, deci

$$u(t) = u(t_k) = u(k) = constant\ , \in [\, t_k\, ,\ t_{k+1}\,]. \qquad (3.329)$$

Efectuând schimbarea de variabila $\tau = \sigma - t_k$ si tinînd seama ca $t_{k+1} - t_k = T$, din (3.328) se obtine

$$x(k+1) = e^{AT} + \int_{0}^{T} e^{A(T-\tau)}Bu(k)d\tau \qquad (3.330)$$

Comparând relatiile (3.325) si (3.330) se deduce prin identificare

$$A_d = e^{AT}\ ;\ B_d = \int_{0}^{T} e^{A(T-\tau)}Bd\tau \qquad (3.331)$$

Cu A_d si B_d date de (3.331) ecuatiile (3.325), (3.326) definesc un sistem discret **numit *discretizantul* cu pasul *T*** *(T > 0)* **al sistemului continuu** descris de ecuatiile (3.142), (3.143). Corespondenta între cele doua sisteme este prezentata în fig. 3.23.

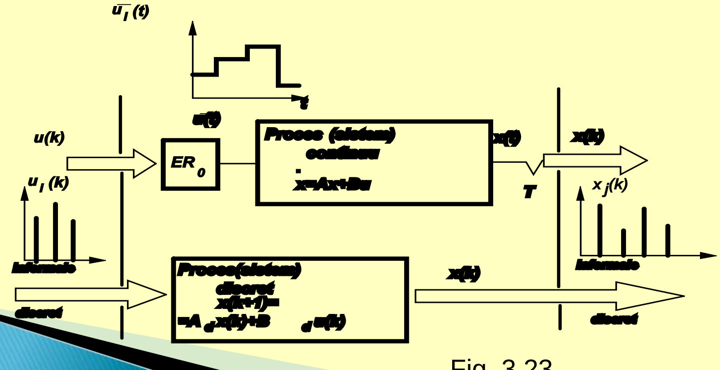

Fig. 3.23

Din figurile 3.22 si 3.23 rezulta ca raspunsurile *y(t)* (sau *x(t)*) sunt cele ale unui sistem supus la o functie scara $\bar{u}(t)$.

Matricele A_d si B_d pot fi evaluate pe baza proprietatii de dezvoltare în serie a matricei exponentiale e^{AT}, conform urmatoarelor relatii

$$A_d = e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(AT)^i \qquad (3.332)$$

$$B_d = T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!}(AT)^i B. \qquad (3.333)$$

Daca exista A^{-1} relatia (3.333) se poate scrie si sub forma

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B = A^{-1}(A_d - I)B. \qquad (3.334)$$

Relatiile (3.332) - (3.334) se pot programa usor pe un calculator numeric.

Exemplul 3.12. Se considera un **servomotor de curent continuu cu excitatie constanta** (cu magnet permanent), comandat pe indus, ce antreneaza o sarcina prin intermediul unui reductor cu un unghi *θ(t)*, fig. 3.24.

Servomotorul este inclus într-un sistem de reglare cu esan-tionare a pozitiei *θ(t)* comandat de calculator conform structurii din fig. 3.22.

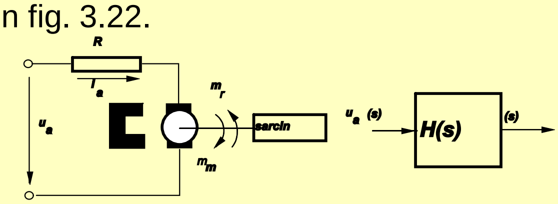

Fig. 3.24

Sa se determine ecuatiile de stare si functia de transfer ale sistemului discret, „vazut” de calculator, corespunzator sistemului continuu, servomotor precedat de elementul de retinere de ordin zero.

Se stabileste mai întâi functia de transfer a sistemului (procesului) continuu în timp. Se neglijeaza inductanta indusului si se considera momentul de inertie *J* si coeficientul de frecare k_1 reduse la arborele motor.

Se considera ca marimea de intrare *u(t)* este tensiunea aplicata indusului si ca marimea de iesire *y(t)* este pozitia unghiulara *θ(t)* a rotorului servomotorului.

Se scriu succesiv ecuatiile

a) ecuatia de tensiuni a indusului

$$u_a = Ri_a + e = Ri_a + k\,\theta^{(1)};\ e = k\,\theta^{(1)} \qquad (3.335)$$

e - tensiunea electromotoare indusa.

b) ecuatia de echilibru a cuplurilor

$$m_m = k\,i_a = m_f + J\,\theta^{(2)} = k_1\theta^{(1)} + J\,\theta^{(2)} \qquad (3.336)$$

m_m - cuplul electromagnetic; m_f - cuplul de frecari, proportional cu viteza unghiulara $\theta^{(1)}(t)$.

Eliminând marimile intermediare din (3.335), (3.336) se obtine ecuatia diferentiala

$$J\,\theta^{(2)} + \left(k_1 + \frac{k^2}{R}\right)\theta^{(1)} = \frac{k}{R}u_a$$

sau $$\theta^{(2)}(t) + a_1\theta^{(1)}(t) = b_0\,u_a(t). \qquad (3.337)$$

Aplicând transformata Laplace si considerând $\theta^{(1)}(0) = \theta(0) = 0$ din (3.337) se obtine functia de transfer a sistemului continuu (servomotorului)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{b_0}{s(s+a_1)}. \qquad (3.338)$$

Pentru a stabili ecuatiile de stare continue ale servomotorului se pleaca de la ecuatia diferentiala (3.337) si se aleg ca variabile de stare pozitia $\theta(t)$ si viteza unghiulara $\theta^{(1)}(t)$

$$\theta(t) = x_1(t) \qquad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\theta^{(1)}(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) + b_0 u_a(t)$$

$$\theta(t) = y(t) \qquad y(t) = x_1(t).$$

Modelul de stare continuu este dat de ecuatiile

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \qquad (3.340)$$

$$y = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \; x(0) = 0.$$

Deci

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} = b; c^T = [1 \;\; 0]. \qquad (3.340)$$

Pentru a calcula e^{AT} se aplica de exemplu metoda transformatei Laplace inverse

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s + a_1)} \\ 0 & \frac{1}{s + a_1} \end{bmatrix}$$

$$e^{AT} = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a_1}(1 - e^{-a_1 t}) \\ 0 & e^{-a_1 t} \end{bmatrix} \qquad (3.341)$$

Tinând seama de (3.341) din (3.331) se obtine

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_1}(1-e^{-a_1 T}) \\ 0 & e^{-a_1 T} \end{bmatrix} \tag{3.342}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A(T-\tau)}\, d\tau\, B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_1}(1-e^{-a_1(T-\tau)}) \\ 0 & e^{-a_1(T-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} \dfrac{b_0}{a_1}(1-e^{-a_1(T-\tau)}) \\ b_0 e^{-a_1(T-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = b_0 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1}T - \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_1^2}e^{-a_1 T} \\ \dfrac{1}{a_1}(1-e^{-a_1 T}) \end{bmatrix} = b_d\,. \tag{3.343}$$

Modelul discret al servomotorului, sub forma ecuatiilor de stare cu diferente, care descrie comportarea acestuia la momentele de esantionare este

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_1}(1-e^{-a_1 T}) \\ 0 & e^{-a_1 T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b_0}{a_1^2}\left(a_1 T - 1 + e^{-a_1 T}\right) \\ \dfrac{b_0}{a_1}\left(1-e^{-a_1 T}\right) \end{bmatrix} u(k) \tag{3.344}$$

$$y(k) = [\,1 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix};\; x(0)=0\,.$$

Functia de transfer în z a sistemului esantionat descris prin modelul discret.

$$H_d(z) = c^T (z\,I - A_d)^{-1}\, b_d\,. \tag{3.345}$$

Se calculeaza matricea inversa $(zI - A_d)^{-1}$ obtinându-se

$$(zI - A_d)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{\alpha}{(z-1)(z-\beta)} \\ 0 & \dfrac{1}{z-\beta} \end{bmatrix} \tag{3.346}$$

cu $\alpha = (1/a_1)(1 - e^{-a1T})$ $\beta = e^{-a1T}$.

Tinând seama de (3.340), (3.343) si (3.346) din (3.345), dupa efectuarea calculelor si simplificarilor posibile, se obtine

$$H_d(z) = \frac{b_0}{a_1}\left[\frac{T}{z-1} - \frac{1-e^{-a_1T}}{a_1(z-e^{-a_1T})}\right]. \quad (3.347)$$

Functia de transfer discrete $H_d(z)$ se poate determina direct din functia de transfer $H(s)$

$$H_d(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{b_0}{s^2(s+a_1)}\right\} \quad (3.348)$$

Din (3.348) se obtine pentru $H_d(z)$ o expresie identica cu (3.347).

3.3.1. Controlabilitatea sistemelor dinamice liniare netede

Definitia 3.4 Un sistem dinamic liniar constant neted (continuu în timp) caracterizat de ecuatiile (3.142), (3.143)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

se spune ca este **complet controlabil din punct de vedere al starilor** daca, pentru orice τ, exista un vector de intrare $u(t)$ care transfera orice stare initiala $x(\tau)$ în orice stare finala $x(t_1)$, oricare ar fi $t_1 > \tau > 0$, t_1 finit.

De asemenea se spune ca un sistem descris de ecuatiile (3.142), (3.143) este complet controlabil din punct de vedere al iesirii daca exista un vector de intrare $u(t)$ care sa transfere orice iesire initiala $y(\tau)$, oricare ar fi τ, în orice iesire finala $y(t_1)$, oricare ar fi $t_1 > \tau > 0$, t_1 finit.

Pentru studiul controlabilitaiti starii sistemelor dinamice liniare constante se utilizeaza foarte frecvent urmatoarea teorema a lui Kalman.

Teorema 3.3. Un sistem dinamic liniar constant (3.142), (3.143) este complet controlabil din punct de vedere al starii daca si numai daca **matricea de controlabilitate Q_c de dimensiune *n x nm*** este de rang n.

$$Q_c = [B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1} B] \qquad (3.366)$$

Deoarece controlabilitatea starii sistemelor dinamice liniare constante este caracterizata numai de perechea de matrice *(A, B)* se mai spune ca sistemul *(A, B, C, D)* este de stare complet controlabila daca **perechea *(A, B)* este controlabila.** O **pereche *(A,B)* este controlabila daca si numai daca *rang* Q_c *= n*.**

Fie doua sisteme echivalente *(A, B, C, D)* ~ $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$

Utilizând relatiile (3.243) se obtine

$$\tilde{Q}_c = \left[\tilde{B} \vdots \tilde{A}\tilde{B} \vdots \dots \vdots \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right] = \left[PB \vdots PAP^{-1}PB \vdots \dots \vdots PAP^{-1}PAP^{-1} \dots PAP^{-1}PB\right] =$$
$$= \left[PB \vdots PAB \vdots \dots \vdots PA^{n-1}B\right] = PQ_c$$
$$\text{rang}\, \tilde{Q}_c = \text{rang}\, Q_c = n\,. \qquad (3.376)$$

relatii care expliciteaza invarianta controlabilitatii la transformarile liniare nesingulare ale vectorului de stare.

Daca pentru un sistem (3.142), (3.143) se poate gasi o transfor-mare nesingulara *P* prin care sa se obtina sistemul echivalent sub forma

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ .. & \vdots & .. \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u \,;\, y = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + Du \qquad (3.377)$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ .. & \vdots & ... \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}\}n_1 ,\tilde{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}\}n_1 ,\tilde{C}=\begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.374)$$

dim $x_1 = n_1$, atunci sistemul este partial controlabil.

În acest caz matricea de controlabilitate este

$$\tilde{Q}_c=\begin{bmatrix} B_1 \; A_{11}B_1 \cdots A_{11}^{n-1}B_1 \\ .... \\ 0 \end{bmatrix}\}n_1 \quad (3.379)$$

Tinând seama si de (3.376), din (3.379) rezulta

$$n_1 = \text{rang}\, Q_c = \text{rang}\, \tilde{Q}_c = \text{rang}\left[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right]= \quad (3.380)$$
$$= \text{rang}\left[B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{n-1}B_1\right]$$

adica în (3.377) numai perechea *(A_{11}, B_1)* este controlabila.

Rezulta ca în acest caz sistemul (3.142), (3.143) nu este complet controlabil din punct de vedere al starii.

Din structura ecuatiilor (3.377) se constata usor ca vectorul x_2 nu depinde de vectorul *u* nici direct, nici prin intermediul componentelor vectorului $\tilde{x}_1$, deci componentele vectorului $\tilde{x}_2$ nu sunt controlabile.

Daca se calculeaza matricea de transfer a sistemelor echiva-lente (3.142), (3.143) si (3.377) se obtine

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1+D. \quad (3.381)$$

Teorema 3.4. Orice sistem este echivalent (în spatiul starilor) cu un altul având structura (3.377), în care sistemul *(A_{11} , B_1, C_1, D)* este controlabil si echivalent intrare/iesire cu sistemul initial.

defineste forma canonica controlabila a unui sistem dinamic liniar monovariabil (vezi relatiile (3.6), (3.7), (3.8).
Se verifica usor ca matricea de controlabilitate a formei cano-nice controlabile este de forma

Pentru un sistem monovariabil a carui matrice de evolutie *A* are polinomul caracteristic *Δ(s)* - (relatia (3.180)) i se poate atasa o reprezentare de stare cu matricea $\tilde{A}$ si vectorul $\tilde{b}$ de forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.388)$$

Perechea $(\tilde{A}, \tilde{b})$ defineste forma canonica controlabila a unui sistem dinamic liniar monovariabil (vezi relatiile (3.6), (3.7), (3.8). Se verifica usor ca matricea de controlabilitate a formei canonice controlabile este de forma

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x & x \\ 0 & 1 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & x & \dots & x & x \end{bmatrix} \qquad (3.389)$$

Fiind o matrice triunghiulara rezulta imediat ca *rang* $Q_c = n$, deci sistemul sub forma canonica controlabila (3.388) este de stare complet controlabila.

Un sistem monovariabil (A, b, c^T, d) de stare complet controlabila poate fi adus la forma canonica controlabila $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T, \tilde{d})$ printr-o transformare liniara nesingulara a carei matrice se determina cu relatia

$$P = \left[\tilde{b}, \quad \tilde{A}\tilde{b}, \quad \ldots, \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}\right]\left[b, \quad Ab, \quad \ldots, \quad A^{n-1}b\right]^{-1} \quad (3.390)$$

Într-adevar sistemele *(A, b, c^T, d)*, $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T, \tilde{d})$

fiind echivalente, între perechile *(A, b)* $(\tilde{A}, \tilde{b})$ exista relatiile

$$\tilde{A}P = P\,A$$

$$\tilde{b} = P\,b. \quad (3.391)$$

Se construiesc vectorii $\tilde{b}, \quad \tilde{A}\tilde{b}, \quad \ldots, \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}$

care sub forma matriceala determina urmatoarea ecuatie în care necunoscuta este matricea P

$$\left[\tilde{b} \quad \tilde{A}\tilde{b}\ldots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}\right] = P\left[b \quad Ab\ldots \quad A^{n-1}b\right]. \quad (3.392)$$

Deoarece perechea *(A, b)* este controlabila, din ecuatiile (3.392) se obtine relatia (3.390).

Exemplul 3.13. Fie sistemul dinamic liniar constant

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u\,;\, y = [1 \ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Sa se studieze controlabilitatea starii acestui sistem determinând rangul matricei de controlabilitate.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix};\, Q_c = [B \vdots AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\, \det Q_c = 0$$

$$\operatorname{rang} Q_c = 1 < n = 2.$$

Rezulta ca sistemul nu este complet controlabil din punct de vedere al starilor.

3.3.2 Observabilitatea sistemelor dinamice liniare.

3.3.2.1. Observabilitatea sistemelor dinamice liniare netede

Observabilitatea este o proprietate a sistemelor dinamice care pune în evidenta posibilitatea determinarii unei stari prin „prelucrarea” marimii masurate.

Definitia 3.7. Un sistem dinamic liniar constant (3.142), (3.143) se spune ca este de stare complet observabila, daca pentru orice τ, vectorul de stare $x(\tau)$ oarecare poate fi complet determinat pe baza cunoasterii vectorului de iesire $y(t)$ pe un interval de timp $[\tau, t_1]$, ($t_1 > \tau \geq 0$).

Pentru aprecierea observabilitatii sistemelor liniare netede se utilizeaza frecvent urmatoarea teorema:

Teorema 3.11. Un sistem dinamic liniar constant neted este de stare complet observabila daca rangul matricei *(np x n)* de observabilitate este *n.*

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.431)$$

Deoarece observabilitatea starii sistemelor dinamice liniare netede este **caracterizata doar de perechea de matrice *(A, C)*** se mai spune ca sistemul *(A, B, C, D)* este de stare complet observabila daca **perechea *(A, C)* este observabila**. O pereche *(A, C)* este observabila daca si numai daca *rang* $Q_o = n$.

Fie doua sisteme echivalente *(A, B, C, D)* ~ $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$

Utilizând relatiile (3.243) se obtin

$$\tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{C}\,\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}\;PAP^{-1} \\ \dots. \\ \dots. \\ CP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1}\dots PAP^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} = Q_c P^{-1}$$

$$\operatorname{rang} \tilde{Q}_0 = \operatorname{rang} Q_0 = n \;. \qquad (3.437)$$

Relatiile (3.437) expliciteaza invarianta observabilitatii la transformarile liniare nesingulare ale vectorului de stare.

Daca pentru un sistem (3.142),(3.143) se poate gasi o astfel de baza a spatiului starilor (sau o transformare liniara nesingulara adecvata) încât aceste ecuatii sa poata fi scrise în forma

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + B_1 u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + B_2 u \qquad (3.349)$$

$$y = C_1 \tilde{x}_1$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}^{\}n_2} ;\; \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} \vdots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{21} \vdots A_{22} \end{bmatrix}^{\}n_2} ;\; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_2 \end{bmatrix}^{\}n_2} \qquad 3.340)$$

$$\tilde{C} = [c_1 \vdots 0], \dim \tilde{X}_1 = n_2 .$$

atunci sistemul este partial observabil.

În acest caz matricea de observabilitate este

$$\tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & \\ C_1 A_{11} & \vdots & \\ C_1 A_{11}^2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \\ C_1 A_{11}^{n-1} & \vdots & \end{bmatrix} \qquad (3.441)$$

Tinându-se seama de (3.437) si (3.441) rezulta

$$n_2 = \text{rang}\,\tilde{Q}_0 = \text{rang}\,Q_0 = \text{rang}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_1 A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.342)$$

adica în (3.439) numai perechea *(C_1, A_{11})* este observabila. Rezulta ca în acest caz sistemul (3.142), (3.143) nu este complet observabil.

Pentru un sistem monovariabil cu polinomul caracteristic *Δ(s)* - (relatia (3.180)), i se poate asocia o reprezentare de stare

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u$$
$$y = \tilde{c}^T \tilde{x} + \tilde{d}u \qquad (3.444)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{n-2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \ldots. \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} \qquad (3.445)$$

$$\tilde{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{d} = d$$

care constituie forma canonica observabila a unui sistem monovariabil. Matricea de observabilitate pentru sistemul (3.444), (3.445) este

$$\tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.. & 0 & ... & 0 \\ x & 1 & 0.. & 0 & ... & 0 \\ x & x & 1.. & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x & x & x & x & 1 & 0 \\ x & x & x & x & x & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.446)$$

Fiind o matrice triunghiulara, rezulta $\operatorname{rang} \tilde{Q}_0 = n$

Deci sistemul monovariabil în forma canonica observabila este complet observabil.

Un sistem monovariabil *(A, b, c^T, d)* de stare complet observabila poate fi adus la forma canonica observabila $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T, \tilde{d})$ prin-tr-o transformare liniara nesingulara a carei matrice se determina unic cu relatia

$$P = \tilde{Q}_0^{-1} Q_0 = \begin{bmatrix} \tilde{c}^T \\ \tilde{c}^T \tilde{A} \\ ... \\ ... \\ \tilde{c}^T \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ ... \\ ... \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (3.447)$$

Relatia (3.447) se poate demonstra utilizând ecuatia (3.437).

Exemplul 3.15. Fie sistemul dinamic liniar constant

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \; ; y = [1 \; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Sa se studieze observabilitatea starii acestui sistem determinând rangul matricei de observabilitate

$$c^T = [1 \;\; 1] \; ; c^T A = [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [3 \;\; 3]$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ; \det Q_0 = 0$$

$$rang\, Q_0 = 1 < n = 2$$

Rezulta ca sistemul nu este de stare complet observabila.