4. STABILITATEA SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

- Stabilitatea este una din proprietăţile interne ale sistemelor dinamice reflectată de dependenţa funcţiei de tranziţie a stărilor $x(t) = \varphi(t,\tau,x_{\tau},\omega)$, de faza iniţială $(\tau,x(\tau))$.
- Se spune că un sistem liniar este stabil dacă, lăsat să evolueze liber (respectiv cu toate intrările în sistem identic nule, $u(t) \equiv 0$), în condiţii iniţiale arbitrare, tinde să atingă o stare de echilibru dinamic caracterizată prin valori finite ale variabilelor funcţionale (de stare şi de ieşire).
- Deoarece în acest caz evoluţia sistemului este influenţată doar de **mărimea de stare (prin conditiile iniţiale *x(τ)*,** rezultatele privitoare la stabilitate se încadrează în aşa **numita *stabilitate internă***

Proprietatea de stabilitate care face referire la mărimile externe poartă denumirea de *stabilitate externă* sau *stabilitate intrare-ieşire.*

Se spune că un **sistem liniar este stabil** dacă pentru orice **mărime de intrare *u(t)*, mărginit**ă pe intervalul $(0, \infty)$, **mărimea de ieşire *y(t)* este de asemenea o funcţie mărginită**. Din această cauză acest tip de stabilitate este denumit şi ***stabilitate „intrare mărginită - ieşire mărginită”*** (*IMEM* sau *BIBO* (bounded input-bounded output)).

4.1.1. Stabilitatea externă a sistemelor dinamice liniare monovariabile constante netede

În cazul sistemelor dinamice monovariabile **stabilitatea externă poa**te fi analizată cu ajutorul **răspunsului la impuls (funcţiei pondere), răspunsului indicial şi răspunsului la frecvenţă.**

Tranziţia intrare-ieşire a unui sistem monovariabil neted, pentru condiţii iniţiale nule se exprimă prin produsul de convoluţie

$$y(t) = y_f(t) = \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma \qquad (4.1)$$

unde *h(t)* este funcţia pondere a sistemului.

Definiţia 4.1. Un sistem monovariabil liniar neted este **stabil extern** sau stabil intrare mărginită-ieşire-mărginită **dacă există *M > 0*** astfel încât

$$|h(t)| \le M \quad (\forall)\ (t > 0)\ . \qquad (4.2)$$

Un sistem monovariabil liniar neted este strict stabil extern sau strict stabil în sens IMEM dacă

$$\int_0^\infty |h(t)|\,dt < \infty \quad (\forall)\ (t > 0)\ . \qquad (4.3)$$

Teorema 4.1. Un sistem dinamic monovariabil liniar neted este **strict stabil extern** dacă şi numai dacă **există *M > 0*** astfel încât oricare ar fi mărimea de intrare *u(t)*, cu *u(t)* = *0* pentru *t* < *0* şi **$|u(t)| \le 1$** pentru *t* ≥ *0*, **răspunsul forţat** (pentru condiţii iniţiale *nule)* ***este mărginit, adică***

$$|y(t)| = |y_f(t)| \le M \quad pentru\ \ t \ge 0\,. \qquad (4.4)$$

Se consideră că $M = \int_0^\infty |h(t)|\,dt$

Trecând la valori absolute în relaţia (4.1) se obţine

$$|y(t)| = \left| \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma \right| \le \int_0^t |h(t-\sigma)||u(\sigma)|\,d\sigma \le$$

$$\le \int_0^t |h(t-\sigma)|\,d\sigma \le \int_0^t |h(\sigma)|\,d\sigma \le \int_0^\infty |h(t)|\,dt = M$$

Dacă se cunoaşte funcţia pondere *h(t)* atunci aprecierea stabilităţii sistemului dinamic se poate face utilizând direct condiţiile (4.2), (4.3).

Exemplul 4.1. Se consideră un sistem dinamic de ordinul doi cu $0 < \xi < 1$, a cărui funcţie pondere este

$$h(t) = \frac{k_p \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right), t \geq 0.$$

unde k_p, ω_n, ξ sunt constante pozitive. Deoarece

$$\left| e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right| < e^{-\xi \omega_n t} < 1, (\forall) t > 0,$$

rezultă că $|h(t)|$ este mărginit şi deci relaţia (4.2) este îndeplinită. Condiţia (4.3) se verifică imediat pentru că $e^{-\xi\omega n t} \to 0$ când $t \to \infty$.

Rezultă că pentru $\xi > 0$ sistemul de ordinul doi este asimptotic stabil.

În cazul în care $\xi = 0$ funcţia pondere a sistemului de ordinul doi devine

$$h(t) = k_p \omega_n \sin(\omega_n t), (\forall) t \geq 0.$$

Pentru că $|h(t)| \leq |k_p \omega_n| > 0$

rezultă că $|h(t)|$ **este mărginit.** Relaţia (4.2) este satisfăcută, dar relaţia (4.3) nu este verificată. Un asemenea element este deci la **limita de stabilitate** şi **nu este asimptotic stabil.**

Deseori se apreciaza stabilitatea, fara determinarea funcţiei pondere şi aplicarea relaţiilor (4.2), (4.3), cu ajutorul unor condiţii echivalente denumite **criterii de stabilitate.**

4.1.1.1. Criteriul fundamental de stabilitate

Pentru un sistem monovariabil funcţia de transfer este o fracţie raţională ireductibilă de forma (2.60)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Răspunsul la impuls (funcţia pondere), pentru *t > 0,* satisface **ecuaţia diferenţială omogenă** (2.228)

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 h^{(1)}(t) + a_0 h(t) = 0 \; t > 0 \,,$$

a cărei **ecuaţie caracteristică** este numitorul funcţiei de transfer

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \,.$$

Fie $\lambda_i,\, i = \overline{1,r}$, rădăcinile ecuaţiei caracteristice, respectiv polii funcţiei de transfer *H(s)*, fiecare de multiplicitate q_i

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = n$$

Calculând răspunsul la impuls prin aplicarea transformatei Laplace inversă funcţiei de transfer descompusă în fracţii simple se obţine

$$h(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{k_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{r} h_i(t) \qquad (4.10)$$

Se observă din (4.10) că **fiecare pol λ_i** contribuie cu o **componentă $h_i(t)$** în răspunsul la impuls *h(t)*, după cum urmează

$$h_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{\alpha_i t} \qquad (4.11.a)$$

pentru un pol simplu $\lambda_i = \alpha_i \in R$

$$h_i(t) = \left(C_i + C_{i+1}\, t + \ldots + C_{i+q_i-1}\, t^{q_i-1} \right) e^{\alpha_i t} \quad (4.11.b)$$

pentru un pol real $\lambda_i = \alpha_i \in R$ de multiplicitate q_i

$$h_i(t) = C_i\, e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) \quad (4.11.c)$$

pentru o pereche de poli complecşi conjugaţi simpli $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$,

$$h_i(t) = \begin{bmatrix} C_i \sin(\beta_i t + \varphi_i) + C_{i+1}\, t \sin(\beta_i t + \varphi_{i+1}) + \ldots \\ \cdots + C_{i+q_i-1}\, t^{q_i-1} \sin(\beta_i t + \varphi_{i+q_i-1}) \end{bmatrix} e^{\alpha_i t} \quad (4.11.d)$$

pentru o pereche de poli complecşi conjugaţi $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ de multiplicitate q_i.

Funcţia pondere ***h(t)* va fi mărginită** dacă şi numai dacă **fiecare termen $h_i(t)$ este mărginit,** adică există $M_i > 0$ astfel încât

$$|h_i(t)| < M_i, \ (\forall)\, t \geq 0. \quad (4.12)$$

Pentru $\lambda_i \in \mathbf{R}$ simple, cazul (*4.11a*), condiţia (4.12) este satisfăcută **dacă $\lambda_i = \alpha_i \leq 0$.** În cazul (*4.11c*) al unei perechi de **poli conjugaţi simpli**, termenul $h_i(t)$ corespunzător (*4.11.c*) este mărginit dacă şi numai dacă $\alpha_i = Re\ \lambda_i \leq 0$ (funcţia sinusoidală fiind mărginită). În continuare se consideră o funcţie $f(t) = t^l e^{at}$, $l \geq 1$, $l \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, a cărei derivată este $f'(t) = (lt^{l-1} + at^l)e^{at}$. Pentru $a > 0$, $f'(t) > 0$, $f(t)$ este monoton crescătoare şi deci nemărginită.

Pentru $a < 0$, $f'(t) = 0$ la $t = -l/a$ unde $f(t)$ are un maxim. Deoarece pe $(0, \infty)$ $f(t)$ este pozitivă, rezultă că este mărginită. Functia $f(t)$ este mărginită dacă şi numai dacă $a < 0$.

Rezultă că termenii ***$h_i(t)$* corespunzători polilor multipli sunt mărginiţi, dacă $\lambda_i = \alpha_i < 0$ în** cazul polilor reali (cazul *4.11b*) si $\alpha_i = Re\ \lambda_i < 0$ pentru polii complecşi conjugaţi (cazul *4.11d*). În aceste condiţii termenii $h_i(t)$ sunt mărginiţi şi deci $h(t)$ este mărginită (relaţia (4.2) este satisfăcută) **şi sistemul este stabil IMEM.)**

Criteriul fundamental de stabilitate IMEM – enunţ

Teorema 4.2. Un sistem liniar monovariabil neted este stabil IMEM dacă şi numai dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $P(s) = 0$ (toţi polii funcţiei de transfer $H(s)$) au partea reală negativă sau nulă

$$\alpha_i = Re\ \lambda_i \leq 0 \qquad (4.13)$$

iar toate rădăcinile (toţi polii) cu partea reală nulă sunt simple.

Pentru ca sistemul dinamic stabil să fie **asimptotic stabil** trebuie să fie **satisfăcută şi condiţia (4.3)** ceea ce implică, din (4.10), ca **fiecare din termenii *$h_i(t)$* să satisfacă condiţia**

$$\lim hi(t) = 0\ . \qquad (4.14)$$

Din relaţiile (*4.11.a-d*) rezultă că această condiţie este satisfăcută dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice (polii funcţiei de transfer) au partea reală negativă

$$\alpha_i = Re\ \lambda_i < 0\ , i = \overline{1\ , r}\ . \qquad (4.15)$$

Într-adevăr pentru cazul (*4.11a)* acest lucru este evident; iar pentru cazul *(4.11c)* se scrie

$$\lim_{t\to\infty} |h_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)| \leq \lim_{t\to\infty} |C_i| e^{\alpha_i t} = 0\ ,$$

Într-adevăr pentru cazul (*4.11a)* acest lucru este evident; iar pentru cazul *(4.11c)* se scrie, dacă $\alpha_i < 0$.

$$\lim_{t\to\infty} |h_i(t)| = \lim_{t\to\infty} |C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)| \leq \lim_{t\to\infty} |C_i| e^{\alpha_i t} = 0 ,$$

Dacă se ţine seama că

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell} e^{at} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell}}{e^{-at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ell\,!}{(-a)^{\ell} e^{-at}} = 0$$

(unde s-a aplicat de *l* ori regula l'Hopital) numai dacă **$a < 0$, rezultă condiţia (4.15) şi în cazul polilor multipli**.

Se poate **enunţa criteriul fundamental de stabilitate asimptotică** astfel

Teorema 4.3. Un sistem dinamic liniar monovariabil neted este asimptotic stabil IMEM dacă şi numai

dacă toţi **polii funcţiei de transfer au partea reală strict negativă**.

Dacă se notează cu **C**$^-$ = {*s* $\in$ **C** $\mid$ *Re s* < *0*} mulţimea tuturor numerelor complexe cu partea reală strict negativă şi cu *P*[*H(s)*] mulţimea tuturor polilor funcţiei de transfer, condiţia (4.15) *se poate scrie în forma*

$$P\,[\,H(s)\,] \subset \mathrm{C}^- . \qquad (4.16)$$

Criteriul fundamental de stabilitate poate fi formulat şi astfel.

Un sistem dinamic liniar monovariabil neted **este asimptotic stabil IMEM dacă şi numai dacă toţi polii funcţiei de transfer sunt situaţi în semiplanul stâng (deschis) al planului complex.**

În fig.4.1 se prezintă o configuraţie de poli corespunzătoare unui sistem (asimptotic) stabil. Astfel polul $\lambda_1 = \alpha_1 \in$ **R**$^-$ introduce o componentă aperiodică amortizată

$e^{\alpha 1t}$), iar perechea de poli complecşi conjugaţi $\lambda_{2}, \bar{\lambda}_{2} = \lambda_3$ introduce o componenta periodică amortizată $\left(e^{\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi \right)$

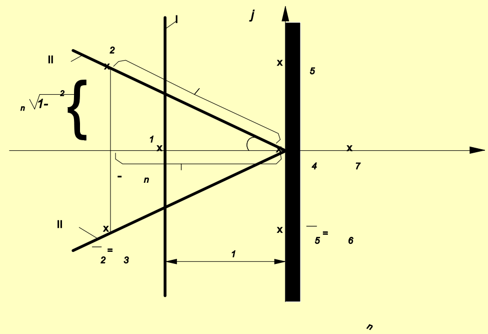

Fig. 4.1

Toţi polii reali situiaţi în stânga dreptei *I* vor introduce componente aperiodice amortizate mai puternic decât ($e^{\alpha 1t}$),

iar toţi polii complecşi conjugaţi situaţi în interiorul dreptelor *II*, vor introduce

componente periodice, cu amortizare mai mare decât $\xi = \cos\theta$. Polii $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ corespund stabilităţii asimptotice.

Polul $\lambda_4 = 0$ introduce o componentă constantă ($e^0 = 1$), iar perechea de poli pur imaginari $\lambda_5, \bar{\lambda}_5 = \lambda_6$ determină o **componentă periodică întreţinută,** în raport cu timpul $(1 - \cos \beta_5 t)$.

Polii $\lambda_4, \bar{\lambda}_5, \lambda_5$ fiind situaţi pe axa imaginară, corespund limitei de stabilitate. Polii din $Re\ s > 0$ **determină instabilitatea sistemului.** Polul λ_7 de exemplu introduce o componentă aperiodică neamortizată în raport cu timpul.

Exemplul 4.2. Fie sistemul cu funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+5)}.$$

Polii funcţiei de transfer sunt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_{3,4} = -1 \pm 2j$.

Pentru că toţi polii au partea reală negativă sistemul cu funcţia de transfer *H(s)* este asimptotic stabil.

Principala dificultate în aplicarea criteriului fundamental de stabilitate rezultă din necesitatea rezolvării unor ecuaţii algebrice de ordin superior.

Au fost dezvoltate metode de analiză a stabilităţii care evită rezolvarea ecuaţiei caracteristice dintre care se menţionează: *criteriul de stabilitate Hurwitz, criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard-Mihailov, criteriul de stabilitate Nyquist.*

4.1.1.2. Criteriul de stabilitate Hurwitz.

Se presupune că ecuaţia caracteristică a unui sistem dinamic monovariabil liniar neted (4.9)

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \,,$$

are toate rădăcinile în $\mathbb{C}^-$. Fie $\lambda_i, i = \overline{1,r}$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice de multiplicitate q_i $\sum_{i=1}^{r} q_i = n$ Atunci *P(s)* se poate scrie

$$P(s) = (s - \lambda_1)^{q_1} (s - \lambda_2)^{q_2} \ldots\ldots (s - \lambda_r)^{q_r} \,. \qquad (4.17)$$

Factorii din (4.17) care corespund rădăcinilor reale sunt de forma $(s - \lambda_i)^{q_i} = (s + \alpha_i)^{q_i}$ cu $\alpha_i > 0$, respectiv sunt polinoamele de grad q_i la care coeficienţii tuturor termenilor sunt strict pozitivi.

Perechile de factori corespunzători unei perechi de rădăcini complex-conjugate $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$ (cu $\alpha_i > 0$), care au obligatoriu acelaşi ordin de multiplicitate $q_i = q_{i+1}$, conduc la un polinom de forma

$$[(s - \lambda_i)(s - \lambda_{i+1})]^{q_i} = \left(s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^{q_i} \,,$$

deci la un polinom de grad $2q_i$

cu coeficienţii termenilor de toate gradele strict pozitivi.

Se obţine deci următoarea condiţie necesară de stabilitate:

Pentru ca un **sistem dinamic să fie (strict) stabil extern** este necesar ca **polinomul său caracteristic *P(s)* (sau ecuaţia caracteristică *P(s) = 0*) să aibă toii coeficienţii pozitivi**.

Cu coeficienţii polinomului caracteristic se construieşte un determinant de ordin n, egal cu gradul polinomului, numit determinantul Hurwitz.

Determinantul Hurwitz se construieşte astfel: pe diagonala principală se trec coeficienţii polinomului caracteristic $P(s)$ scris în ordinea descrescătoare a puterilor lui s, ca în relaţia (4.9), începând cu a_{n-1}; pe fiecare coloană, sub diagonala principală se trec coeficienţii termenilor de grad superior, iar deasupra diagonalei principale se trec coeficienţii termenilor de grad inferior;

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}. \qquad (4.18)$$

după epuizarea coeficienţilor locurile rămase libere se completează cu zerouri.

Criteriul de stabilitate Hurwitz se formulează astfel:

Teorema 4.4. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia (4.9) să aibă toate rădăcinile situate în $Re\ s < 0$, respectiv ca sistemul cu funcţia de transfer (2.109) să fie stabil, este ca toti determinantii minori principali, inclusiv determinantul Hurwitz, să fie strict pozitivi

$$\det H_j > , j = \overline{1,n}. \qquad (4.19)$$

Adică

$$H_1 = a_{n-1} > 0, H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0, H_n > 0.$$

Polinoamele caracteristice corespunzătoare sistemelor stabile se numesc *polinoame hurwitziene*.

Exemplul 4.3. Să se verifice dacă polinomul caracteristic

$$P(s) = s^4 + 2,7s^3 + 2,5s^2 + 0,9s + 0,1$$

este hurwitzian

Determinantul Hurwitz corespunzator este

.

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 & 0 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 2,7 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1 & 2,5 & 0,1 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = 2,7 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 \\ 1 & 2,5 \end{vmatrix} = 6,75 - 0,9 = 5,85 > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,1 \\ 0 & 2,7 & 0,9 \end{vmatrix} = 4,5 > 0, H_4 = 0,1\, H_3 = 0,45 > 0.$$

Polinomul este hurwitzian, $\det H_j > 0,\ j = \overline{1,4}$

4.1.1.3. Criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard- Mihailov

Criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard-Mihailov este un criteriu frecvenţial care se poate aplica uşor şi pentru sistemele dinamice de ordin mai ridicat, cu condiţia ca polinomul caracteristic *P(s)* să nu aibă rădăcini în *s = 0*

Enunt - Teorema 4.6. **O condiţie necesară şi suficientă** ca polinomul caracteristic *P(s)* - relaţia (4.9), să fie hurwitzian (deci ca sistemul cu funcţia de transfer (2.60) să fie stabil) este ca

$$\arg P(j\omega)\Big|_0^\infty = n\frac{\pi}{2}. \tag{4.21}$$

Demonstraţie . Se utilizează teorema argumentului (relaţia (2.84))., conform careia, variaţia totală a argumentului polinomului de grad *n*, *P(jω)*, la variaţia frecvenţei de la - ∞ la + ∞ este

$$arg\ P(j\omega)\Big|_{-\infty}^{\infty} = n\pi. \tag{4.22}$$

Deoarece *P(s)* are coeficienţii reali rezultă că *P(jω)* este simetric faţă de axa reală şi în acest caz (4.22) se reduce la (4.21).

Acest criteriu se utilizează sub formă grafică, conform enuntului:

Teorema 4.7. **O condiţie necesară şi suficientă ca *P(s)* să fie hurwitzian este ca fazorul *P(jω)* să parcurgă succesiv şi în sens trigonometric pozitiv *n* cadrane,** când *ω* variază de la *0* la ∞.

Polinomul nu este hurwitzian şi respectiv sistemul dinamic corespunzător nu este stabil, dacă sensul de parcurgere al cadranelor este invers trigonometric, sau dacă numărul cadranelor parcurse este mai mic decât gradul polinomului P(s).

Exemplul 4.4. Se consideră sistemul dinamic liniar constant cu polinomul caracteristic

$P(s) = 0,004s^5 + 0,1s^4 + 1,05s^3 + 2,8s^2 + 4,3s + 1,6$.

Să se verifice dacă sistemul este asimptotic stabil cu criteriul Cremer-Leonhard-Mihailov. Se calculează *P(jω)*

$$P(j\omega) = 0,1\omega^4 - 2,8\omega^2 + 1,6 + j\omega(0,004\omega^4 - 1,05\omega^2 + 4,3) =$$
$$= P_R(\omega) + jP_I(\omega).$$

Se dau valori lui *ω* si se completeaza tabelul urmator

ω	0	0,77	2,04	5,2	16,7	+∞
$P_R(\omega)$	1,6	0	-8,32	0	6998,7	+∞
$P_I(\omega)$	0	2,1	0	-110-,07	0	+∞

În fig. 4.2 se prezinta hodograful $P(j\omega)$. Deoarece pentru $\omega \in [0,\infty)$ **hodograful parcurge succesiv în sens trigonometric pozitiv cinci cadrane, sistemul este asimptotic stabil.** Din tabelul de mai sus se observa ca rădăcinile partii reale $P_R(\omega)$ si ale partii imaginare $P_I(\omega)$ alterneaza în cazul sistemelor stabile.

Analiza stabilitatii unui sistem cu o structura data

Se considera conexiunile de baza, serie, paralel si cu reactie . Pentru simplitate se considera doar doua elemente cu functiile de transfer $H_i(s) = Q_i(s)/P_i(s),\ i = 1,2,$

Funcţia de transfer echivalenta a conexiunii serie,

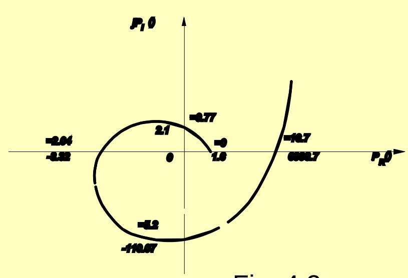

Fig. 4.2

$$H_s(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P_1(s)P_2(s)}. \qquad (4.23)$$

iar cea a conexiunii paralel este

$$H_p(s) = H_1(s) \pm H_2(s) = \frac{Q_1(s)P_2(s) \pm Q_2(s)P_1(s)}{P_1(s)P_2(s)}. \qquad (4.24)$$

Polinomul caracteristic al sistemului format din cele doua elemente este $P(s) = P_1(s)P_2(s)$, care este stabil dacă $P_1(s)$ si $P_2(s)$ sunt stabile

Rezulta ca orice structura obtinuta numai prin conectarea în serie sau în paralel a mai multor elemente stabile formeaza un sistem stabil.

În cazul conexiunii cu reactie a celor doua elemente, fig. 4.3.*a*, funcţia de transfer echivalenta, conform relatiei (2.99) este Polinomul caracteristic al sistemului depinde si de polinoamele de la numaratorul functiilor de transfer.

$$H_0(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)} = \frac{Q_1(s)P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) \pm Q_1(s)Q_2(s)}. \qquad (4.25)$$

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \pm Q_1(s)Q_2(s) \qquad (4.26)$$

Deci problema stabilitatii sistemelor cu reactie trebuie analizată pentru fiecare caz în parte. Se constata usor ca structura cu reactie unitara din fig. 4.3.*b* are un polinom caracteristic identic cu cea din fig. 4.3.*a*, $H_1(s)$, $H_2(s)$ fiind aceleasi.

Se poate limita studiul stabilitatii sistemelor cu reactie la structurile cu reactie unitara, fig. 4.3.*c*, în care $H(s) = Q(s)/P(s)$ este funcţia de transfer în circuit deschis, iar

$$H_0(s) = \frac{H(s)}{1 \pm H(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) \pm Q(s)} \qquad (4.27)$$

este funcţia de transfer în circuit închis.

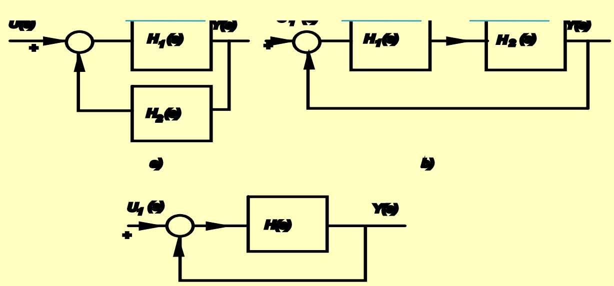

Fig. 4.3

4.1.1.4. Criteriul de stabilitate Nyquist

Criteriul de stabilitate Nyquist este de asemenea un **criteriu frecvential** care permite analiza stabilitatii unui **sistem cu reactie unitara negativa,** având forma din fig. 4.3.*c* (pe baza locului de transfer $H(j\omega)$ a sistemului în circuit deschis si a cunoasterii numarului de poli ai funcţiei $H(s)$ din semiplanul drept $\mathbf{C}^{+}\ \{s \in \mathbf{C}\ /\ \mathrm{Re}\ s \geq 0\}$ al planului complex s.

De remarcat ca în **orice sistem cu reactie neunitara fig. 4.4.*a***, prin transfigurarea schemei bloc se poate pune în evidenta **o structura cu reactie unitara,** fig. 4.4.*b*, în **care pe legatura directa este funcţia de transfer a sistemului deschis $H(s) = H_1(s)H_2(s)$** (a sistemului cu circuitul de reactie întrerupt în punctul P, fig. 4.4.*a*), **numita si funcţie de transfer a circuitului sistemului.**

Marimea de intrare în structura închisa propriu-zisa din fig. 4.4.*b* se exprima prin

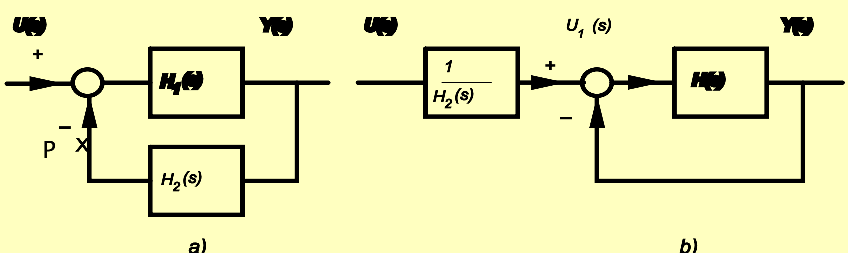

Fig. 4.4

$$U_1(s) = \frac{U(s)}{H_2(s)}. \tag{4.28}$$

Se considera ca functia de transfer a sistemului deschis este unde $P(s)$ si $Q(s)$ sunt doua polinoame de grad n si respectiv m cu $m \leq n$.

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{4.29}$$

Pentru structura închisa din fig. 4.3.*c*, respectiv fig. 4.4.*b*, functia de transfer se poate scrie

$$H_0(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} = \frac{H(s)}{G(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)+Q(s)} \quad (4.30)$$

$$G(s) = 1 + H(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}\,. \quad (4.31)$$

Din criteriul fundamental de stabilitate se stie ca sistemul cu structura închisa cu functia de transfer (4.30) este stabil IMEM **daca polii sai sunt în *Re s < 0*, (C^-).** Din (4.30) rezulta ca **polii sistemului închis sunt zerourile funcaiei *G(s)*.** Ca urmare **conditia de stabilitate este ca *G(s)* sa nu aiba nici un zerou în semiplanul drept C^+ al planului complex *(Re s ≥ 0)*.** Din (4.30) si (4.31) se constata ca **polii functiei *G(s)* sunt chiar polii lui *H(s)*, adica polii sistemului în circuit deschis**.

Determinarea localizarii zerourilor functiei (4.31) se poate face cu ajutorul teoremei argumentului (relatia (2.84)) aplicata functiei *G(s)*, atunci când *s* parcurge conturul Nyquist, fig. 2.9.

Din relatia (4.31) se observa ca *G(s)* este raportul a doua polinoame de grad *n.* În aceste conditii punctul de la ∞ *nu introduce nici o variatie a argumentului fazorului G(jω)* pentru *ω* ∈ ***R****. Daca* **G(s) are *z* zerouri si *p* poli în *Re s > 0*, z_0 zerouri si p_0 poli pe axa imaginara *(Re s = 0)*,** din teorema argumentului rezulta

$$\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi(z-p) - \pi(z_0 - p_0)\,. \quad (4.32)$$

Dar sistemul închis este stabil IMEM daca si numai daca *G(s)* nu are zerouri în *Re s ≥ 0*, adica daca si numai daca $z = 0$, $z_0 = 0$, atunci din (4.32) se obtine

$$\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi\, p + \pi\, p_0\,. \quad (4.33)$$

Pe baza relatiei (4.33) se poate enunta criteriul Nyquist :

Teorema 4.8. Un sistem dinamic liniar constant monovariabil neted cu structura închisa, cu functia de transfer (4.30) este stabil IMEM daca si numai **daca variatia argumentului fazorului *G(jω)*,** pentru *ω ∈ **R** satisface relatia (4.33), deci daca* ***acest fazor înconjoara originea planului G(jω) de (p + p_0/2) ori în sens trigonome-tric pozitiv, fig. 4.5, când ω ∈ R.***

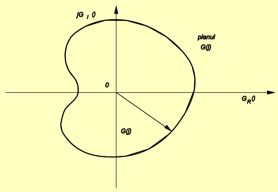

Fig. 4.5

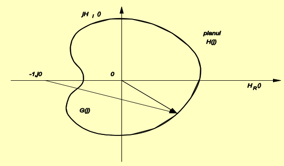

Fig. 4.6

Deoarece polii functiei *G(s)* coincid cu polii functiei de transfer a sistemului deschis *H(s)* rezulta ca asupra sistemului deschis nu se pun restrictii, acesta putând fi instabil (daca $p \neq 0$, $p_0 \neq 0$), $p, p_0 \in$ **C**$^{+}$.

Pentru verificarea practica a conditiei (4.33) este suficient sa se reprezinte grafic hodograful *H(jω).*

Hodograful *G(jω)* se poate obtine din hodograful *H(jω)* prin raportarea la o noua origine *(-1, j0)*, în planul *H(jω)*, fig. 4.6.

Se poate acum formula criteriul Nyquist astfel:

Teorema 4.9. **Un sistem dinamic liniar** constant monovariabil neted **cu structura închisa** cu functia de transfer (4.30) **este stabil IMEM** daca si numai daca locul de transfer al sistemului deschis (hodograful *H(jω)*) înconjoara **punctul (-1, j0) de (p + p_0)/2 ori în sens trigonometric pozitiv**, când *ω* variaza de la - ∞ la + ∞.

Daca sistemul deschis este stabil IMEM, respectiv $p = 0$, $p_0 = 0$, criteriul Nyquist se numeste criteriul Nyquist simplificat si se enunta astfel:

Teorema 4.10. Un sistem dinamic liniar monovariabil cu structura închisa, cu functia de transfer (4.30) si sistemul deschis stabil IMEM, este stabil IMEM daca si numai daca locul de transfer *H(jω)* al sistemului deschis nu înconjoara punctul *(-1, j0)* atunci când ω variaza de la - ∞ la + ∞.

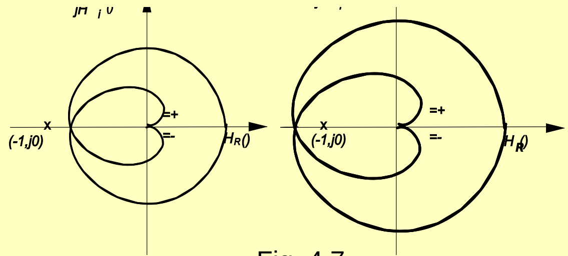

Fig. 4.7

Astfel, în ipoteza ca *H(s)* este functia de transfer a unui sistem stabil IMEM, prin aplicarea criteriului Nyquist simplificat se deduce ca **locul de transfer din fig. 4.7.*a*** corespunde unui **sistem stabil** în circuit închis, iar **locul de transfer din fig. 4.7.*b* corespunde unui sistem instabil.**

Pozitia punctului*(-1, jω)* fata de hodograful *H(jω)* poate fi determinata cu usurinta daca se hasureaza partea dreapta a curbei *H(jω)* pentru sensul crescator al pulsatiei, ca în fig. 4.7.*b*.

Daca punctul *(-1, j0)* este într-o zona hasurata, locul de transfer înconjoara acest punct si deci sistemul închis este instabil IMEM.

Un caz limita interesant corespunde conditiei

$$H(j\omega) = -1 \qquad (4.34)$$

când locul de transfer *H(jω)* trece prin punctul *(-1, j0)*. Aceasta înseamna ca *G(s) = 1 + H(s)* are zerouri, respectiv $H_0(s)$ are poli, pe axa imaginara *(Re s = 0)*.

Daca aceste zerouri sunt simple sistemul închis nu este stabil IMEM (sistemul este la limita de stabilitate). Din aceasta cauza **punctul *(-1, j0)*** se mai numeste si ***punct critic.*** Stabilitatea IMEM a sistemului deschis *H(s)*, se poate studia determinând variatia argumentului fazorului *H(jω)* fata de originea planului *H(jω)*. Aplicând teorema argumentului, pentru $p = 0$, $p_0 = 0$, rezulta:

Teorema 4.11. Un sistem dinamic deschis este stabil IMEM daca si numai daca variatia argumentului este

$$arg\ H(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi z - \pi z_0 - (n-m)\pi \qquad (4.35)$$

unde z si z_0 sunt numarul de zerouri din $Re\ s > 0$ si respectiv de pe axa imaginara, $Re\ s = 0$, ale functiei $H(s)$.

Avantajelel esentiale ale criteriului Nyquist: a)utilizând locul de transfer *H(jω)* se poate aprecia atât **stabilitatea sistemului deschis cu functia de transfer *H(s)***, cât si **stabilitatea sistemului închis cu reacaie negativa unitara** cu functia *H(s)* pe calea directa. b)posibilitatea de a aprecia gradul de stabilitate al unui sistem în circuit închis pe baza notiunii de ***stabilitate relativa* IMEM.**

Se eviden-teaza pul-satiile ω_1 si ω_π pentru care

Se considera locul de transfer *H(jω)* al unui sistem stabil în circuit deschis prezentat în fig. 4.8. Se evidentiaza pulsatiile ω_1 si ω_π pentru care

$$|H(j\omega_1)| = 1 \qquad arg\ H(j\omega_\pi) = -\pi \qquad (4.40)$$

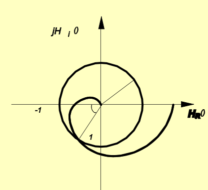

Fig. 4.8

Pentru pulsatia ω_1 locul de transfer al sistemului deschis *H(jω)* taie cercul de raza unitara, iar pentru pulsatia ω_π acest loc taie axa reala.

Stabilitatea relativa se apreciaza prin:

- marginea de amplificare (de câstig) m

$$m = \frac{1}{|H(j\omega_\pi)|}; \qquad (4.41)$$

- marginea de faza

$$\gamma = \pi - |arg\ H(j\omega_1)|. \qquad (4.42)$$

Se poate aprecia ca **sistemele închise stabile IMEM** au o **comportare cu atât mai buna cu cât hodograful *H(jω)* este mai departat de punctul critic *(-1, j0)*.** Aceasta implica valori mari pentru marginea de amplificare *m* si marginea de faza *γ*. **Stabilitatea relativa se considera practic satisfacuta daca $m \geq 3$ si $\gamma \geq 30^o$.**

Marginea de faza si marginea de amplificare (exprimata în dB) pot fi determinate si din diagrama Bode asa cum se precizeaza în fig. 4.9.

Pulsatia ω_1 pentru care $|H(j\omega)| = 1$, $A_{dB}(\omega) = 0$, caracteristica atenuare-frecventa taie axa absciselor se numeste ***pulsatie de taiere.*** Marginea de amplificare exprimata în decibeli este egala cu modulul atenuarii la pulsatia ω_π

$$m_{dB} = |A_{dB}(\omega_\pi)|, \arg|H(j\omega_\pi)| = -\pi \qquad (4.43)$$

iar marginea de faza se determina cu

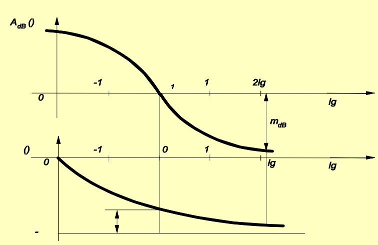

Fig. 4.9

$$\gamma = 180° - |\arg H(j\omega_1)| \;;\; |H(j\omega_1)| = 1, A_{dB}(\omega_1) = 0. \qquad (4.44)$$

Se recomanda urmatoarele valori pentru o stabilitate IMEM satisfacatoare: $m_{dB} = 10 - 20$ dB si $\gamma = 30° - 50°$.

Exemplul 4.5. Se considera un sistem cu functia de transfer în circuit deschis

$$H(s) = \frac{k_p}{(s-a)(s+b)}, k_p > 0, a > 0, b > 0.$$

Sa se studieze stabilitatea sistemului închis cu reactie unitara utilizând criteriul Nyquist.

Deoarece *H(s)* are un pol în *Re s > 0,* $\lambda_1 = a > 0$, sistemul în circuit închis va fi stabil daca, conform relatiei (4.33), pentru $p = 1,\ p_0 = 0$

$$\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

deci daca locul de transfer *H(jω)* va înconjura o data, în sens trigonometric pozitiv, punctul critic *(-1, j0)*. Din raspunsul la frecventa *H(jω)* rezulta

$$H_R(\omega) = \frac{-k_p(ab+\omega^2)}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}\,;\ H_I(\omega) = \frac{k_p\,\omega(a-b)}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}$$

cu care se traseaza locul de transfer. Pentru diferite valori ale parametrilor k_p*, a, b*, acest loc are formele din fig. 4.10.*a,b,c*.

Se observa ca sistemul în circuit închis este stabil IMEM numai daca $b > a$ si $k_p > ab$, fig. 4.10.*c*, când $\arg G(j\omega) = 2\pi$. În fig.4.10.*a*, $\arg G(j\omega) = -2\pi$, iar în fig. 4.10.*b* $\arg G(j\omega) = 0$.

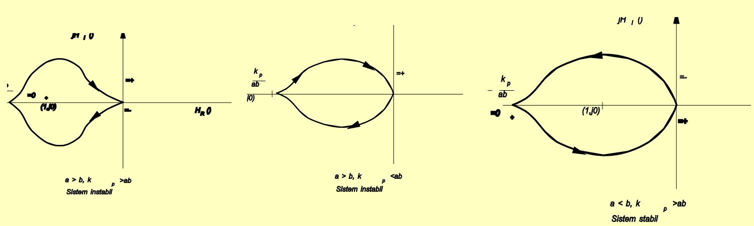

Fig. 4.10