

4. STABILITATEA SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

- ▶ Stabilitatea este una din proprietățile interne ale sistemelor dinamice reflectată de dependența funcției de tranziție a stărilor $x(t) = \varphi(t, \tau, x_\tau, \omega)$, de faza inițială $(\tau, x(\tau))$.
- ▶ Se spune că un sistem liniar este stabil dacă, lăsat să evolueze liber (respectiv cu toate intrările în sistem identic nule, $u(t) \equiv 0$), în condiții inițiale arbitrare, tinde să atingă o stare de echilibru dinamic caracterizată prin valori finite ale variabilelor funcționale (de stare și de ieșire).
- ▶ Deoarece în acest caz evoluția sistemului este influențată doar de **mărimea de stare (prin condițiile inițiale $x(\tau)$)**, rezultatele privitoare la stabilitate se încadrează în așa numita **stabilitate internă**

Proprietatea de stabilitate care face referire la mărimile externe poartă denumirea de **stabilitate externă** sau **stabilitate intrare-ieșire**.

Se spune că un **sistem liniar este stabil** dacă pentru orice **mărime de intrare $u(t)$, mărginită** pe intervalul $(0, \infty)$, **mărimea de ieșire $y(t)$ este de asemenea o funcție mărginită**. Din această cauză acest tip de stabilitate este denumit și **stabilitate „intrare mărginită - ieșire mărginită”** (*IMEM* sau *BIBO* (bounded input-bounded output)).

4.1.1. Stabilitatea externă a sistemelor dinamice liniare monovariabile constante netede

În cazul sistemelor dinamice monovariabile **stabilitatea externă** poate fi analizată cu ajutorul **răspunsului la impuls (funcției pondere), răspunsului indicial și răspunsului la frecvență**.

Tranziția intrare-ieșire a unui sistem monovariabil neted, pentru condiții inițiale nule se exprimă prin produsul de convoluție

$$y(t) = y_f(t) = \int_0^t h(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (4.1)$$

unde $h(t)$ este funcția pondere a sistemului.

Definiția 4.1. Un sistem monovariabil liniar neted este **stabil extern** sau stabil intrare mărginită-ieșire-mărginită **dacă există $M > 0$** astfel încât

$$|h(t)| \leq M \quad (\forall) \quad (t > 0) . \quad (4.2)$$

Un sistem monovariabil liniar neted este strict stabil extern sau strict stabil în sens IMEM dacă

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (\forall) \quad (t > 0) . \quad (4.3)$$

Teorema 4.1. Un sistem dinamic monovariabil liniar neted este **strict stabil extern** dacă și numai dacă **există $M > 0$** astfel încât oricare ar fi mărimea de intrare $u(t)$, cu $u(t) = 0$ pentru $t < 0$ și $|u(t)| \leq 1$ pentru $t \geq 0$, **răspunsul forțat** (pentru condiții inițiale nule) **este mărginit, adică**

$$|y(t)| = |y_f(t)| \leq M \quad \text{pentru } t \geq 0 . \quad (4.4)$$

Se consideră că $M = \int_0^{\infty} |h(t)| dt$

Trecând la valori absolute în relația (4.1) se obține

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t h(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_0^t |h(t - \sigma)| |u(\sigma)| d\sigma \leq \\ &\leq \int_0^t |h(t - \sigma)| d\sigma \leq \int_0^t |h(\sigma)| d\sigma \leq \int_0^{\infty} |h(t)| dt = M \end{aligned}$$

Dacă se cunoaște funcția pondere $h(t)$ atunci aprecierea stabilității sistemului dinamic se poate face utilizând direct condițiile (4.2), (4.3).

Exemplul 4.1. Se consideră un sistem dinamic de ordinul doi cu $0 < \xi < 1$, a cărui funcție pondere este

$$h(t) = \frac{k_p \omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right), t \geq 0.$$

unde k_p, ω_n, ξ sunt constante pozitive. Deoarece

$$\left| e^{-\xi \omega_n t} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right| < e^{-\xi \omega_n t} < 1, (\forall) t > 0,$$

rezultă că $|h(t)|$ este mărginit și deci relația (4.2) este îndeplinită. Condiția (4.3) se verifică imediat pentru că $e^{-\xi \omega_n t} \rightarrow 0$ când $t \rightarrow \infty$.

Rezultă că pentru $\xi > 0$ sistemul de ordinul doi este asimptotic stabil.

În cazul în care $\xi = 0$ funcția pondere a sistemului de ordinul doi devine

$$h(t) = k_p \omega_n \sin \left(\omega_n t \right), (\forall) t \geq 0.$$

Pentru că $|h(t)| \leq k_p \omega_n > 0$

rezultă că $|h(t)|$ este mărginit. Relația (4.2) este satisfăcută, dar relația (4.3) nu este verificată. Un asemenea element este deci la **limita de stabilitate** și **nu este asimptotic stabil**.

Deseori se apreciază stabilitatea, fără determinarea funcției pondere și aplicarea relațiilor (4.2), (4.3), cu ajutorul unor condiții echivalente denumite **criterii de stabilitate**.

4.1.1.1. Criteriul fundamental de stabilitate

Pentru un sistem monovariabil funcția de transfer este o fracție rațională ireductibilă de forma (2.60)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Răspunsul la impuls (funcția pondere), pentru $t > 0$, satisface **ecuația diferențială omogenă** (2.228)

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 h^{(1)}(t) + a_0 h(t) = 0 \quad t > 0,$$

a cărei **ecuație caracteristică** este numitorul funcției de transfer

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Fie $\lambda_i, i = \overline{1, r}$, rădăcinile ecuației caracteristice, respectiv polii funcției de transfer $H(s)$, fiecare de multiplicitate q_i

$$\sum_{i=1}^r q_i = n$$

Calculând răspunsul la impuls prin aplicarea transformatei Laplace inversă funcției de transfer descompusă în fracții simple se obține

$$h(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{k_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^r h_i(t) \quad (4.10)$$

Se observă din (4.10) că **fiecare pol λ_i** contribuie cu o **componentă $h_i(t)$** în răspunsul la impuls $h(t)$, după cum urmează

$$h_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{\alpha_i t} \quad (4.11.a)$$

pentru un pol simplu $\lambda_i = \alpha_i \in \mathbf{R}$

$$h_i(t) = \left(C_i + C_{i+1}t + \dots + C_{i+q_i-1}t^{q_i-1} \right) e^{\alpha_i t} \quad (4.11.b)$$

pentru un pol real $\lambda_i = \alpha_i \in \mathbf{R}$ de multiplicitate q_i

$$h_i(t) = C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) \quad (4.11.c)$$

pentru o pereche de poli complecși conjugați simpli $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$

$$h_i(t) = \left[\begin{array}{l} C_i \sin(\beta_i t + \varphi_i) + C_{i+1}t \sin(\beta_i t + \varphi_{i+1}) + \dots \\ \dots + C_{i+q_i-1}t^{q_i-1} \sin(\beta_i t + \varphi_{i+q_i-1}) \end{array} \right] e^{\alpha_i t} \quad (4.11.d)$$

pentru o pereche de poli complecși conjugați $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$ de multiplicitate q_i .

Funcția pondere $h(t)$ va fi **mărginită** dacă și numai dacă **fiecare termen $h_i(t)$ este mărginit**, adică există $M_i > 0$ astfel încât

$$|h_i(t)| < M_i, (\forall) t \geq 0. \quad (4.12)$$

Pentru $\lambda_i \in \mathbf{R}$ simple, cazul (4.11a), condiția (4.12) este satisfăcută **dacă $\lambda_i = \alpha_i \leq 0$** . În cazul (4.11c) al unei perechi de **poli conjugați simpli**, termenul $h_i(t)$ corespunzător (4.11.c) este mărginit dacă și numai dacă **$\alpha_i = \text{Re } \lambda_i \leq 0$** (funcția sinusoidală fiind mărginită). În continuare se consideră o funcție $f(t) = t^l e^{at}$, $l \geq 1$, $l \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, a cărei derivată este $f'(t) = (lt^{-1} + at^l)e^{at}$. Pentru $a > 0$, $f'(t) > 0$, $f(t)$ este monoton crescătoare și deci nemărginită.

Pentru $a < 0$, $f'(t) = 0$ la $t = -l/a$ unde $f(t)$ are un maxim. Deoarece pe $(0, \infty)$ $f(t)$ este pozitivă, rezultă că este mărginită. Funcția $f(t)$ este mărginită dacă și numai dacă $a < 0$.

Rezultă că termenii $h_i(t)$ corespunzători polilor multipli sunt mărginiți, dacă $\lambda_i = \alpha_i < 0$ în cazul polilor reali (cazul 4.11b) și $\alpha_i = \text{Re } \lambda_i < 0$ pentru polii complecși conjugați (cazul 4.11d). În aceste condiții termenii $h_i(t)$ sunt mărginiți și deci $h(t)$ este mărginită (relația (4.2) este satisfăcută) și sistemul este stabil IMEM.)

Criteriul fundamental de stabilitate IMEM – enunț

Teorema 4.2. Un sistem liniar monovariabil neted este stabil IMEM dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice $P(s) = 0$ (toți polii funcției de transfer $H(s)$) au partea reală negativă sau nulă

$$\alpha_i = \text{Re } \lambda_i \leq 0 \quad (4.13)$$

iar toate rădăcinile (toți polii) cu partea reală nulă sunt simple.

Pentru ca sistemul dinamic stabil să fie **asimptotic stabil** trebuie să fie **satisfăcută și condiția (4.3)** ceea ce implică, din (4.10), ca **fiecare din termenii $h_i(t)$ să satisfacă condiția**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = 0. \quad (4.14)$$

Din relațiile (4.11.a-d) rezultă că această condiție este satisfăcută dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice (polii funcției de transfer) au partea reală negativă

$$\alpha_i = \text{Re } \lambda_i < 0, i = \overline{1, r} \quad (4.15)$$

Într-adevăr pentru cazul (4.11a) acest lucru este evident; iar pentru cazul (4.11c) se scrie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |C_i| e^{\alpha_i t} = 0,$$

Într-adevăr pentru cazul (4.11a) acest lucru este evident; iar pentru cazul (4.11c) se scrie, dacă $\alpha_i < 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |C_i| e^{\alpha_i t} = 0,$$

Dacă se ține seama că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\ell e^{at} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\ell}{e^{-at}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell!}{(-a)^\ell e^{-at}} = 0$$

(unde s-a aplicat de ℓ ori regula l'Hopital) numai dacă $a < 0$, rezultă condiția (4.15) și în cazul polilor multipli.

Se poate enunța criteriul fundamental de stabilitate asimptotică astfel

Teorema 4.3. Un sistem dinamic liniar monovariabil neted este asimptotic stabil IMEM dacă și numai

dacă toți **polii funcției de transfer au partea reală strict negativă.**

Dacă se notează cu $\mathbf{C}^- = \{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} s < 0\}$ mulțimea tuturor numerelor complexe cu partea reală strict negativă și cu $P[H(s)]$ mulțimea tuturor polilor funcției de transfer, condiția (4.15) se poate scrie în forma

$$P[H(s)] \subset \mathbf{C}^-. \quad (4.16)$$

Criteriul fundamental de stabilitate poate fi formulat și astfel.

Un sistem dinamic liniar monovariabil neted **este asimptotic stabil IMEM dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer sunt situați în semiplanul stâng (deschis) al planului complex.**

În fig.4.1 se prezintă o configurație de poli corespunzătoare unui sistem (asimptotic) stabil. Astfel polul $\lambda_1 = \alpha_1 \in \mathbf{R}^-$ introduce o componentă aperiodică amortizată

$e^{\alpha t}$), iar perechea de poli complecși conjugați $\lambda_{2,2} = \lambda_3$ introduce o componenta periodică amortizată ($e^{\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi)$)

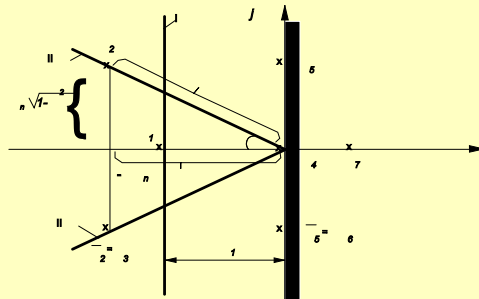


Fig. 4.1

Toți polii reali situați în stânga dreptei *I* vor introduce componente aperiodice amortizate mai puternic decât ($e^{\alpha t}$), iar toți polii complecși conjugați situați în interiorul dreptelor *II*, vor introduce

componente periodice, cu amortizare mai mare decât $\xi = \cos \theta$. Polii $\lambda_1, \lambda_2, 2$ corespund stabilității asimptotice.

Polul $\lambda_4 = 0$ introduce o componentă constantă ($e^0 = 1$), iar perechea de poli pur imaginari $\lambda_5, 5 = \lambda_6$ determină o **componentă periodică întreținută**, în raport cu timpul ($1 - \cos \beta_5 t$).

Polii $\lambda_4, 5, \lambda_5$ fiind situați pe axa imaginară, corespund limitei de stabilitate. Polii din $Re s > 0$ **determină instabilitatea sistemului**. Polul λ_7 de exemplu introduce o componentă aperiodică neamortizată în raport cu timpul.

Exemplul 4.2. Fie sistemul cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10} = \frac{2s + 1}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Polii funcției de transfer sunt $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_{3,4} = -1 \pm 2j$.

Pentru că toți polii au partea reală negativă sistemul cu funcția de transfer $H(s)$ este asimptotic stabil.

Principala dificultate în aplicarea criteriului fundamental de stabilitate rezultă din necesitatea rezolvării unor ecuații algebrice de ordin superior.

Au fost dezvoltate metode de analiză a stabilității care evită rezolvarea ecuației caracteristice dintre care se menționează: *criteriul de stabilitate Hurwitz, criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard-Mihailov, criteriul de stabilitate Nyquist.*

4.1.1.2. Criteriul de stabilitate Hurwitz.

Se presupune că ecuația caracteristică a unui sistem dinamic monovariabil liniar neted (4.9)

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0,$$

are toate rădăcinile în \mathbf{C}^- . Fie $\lambda_r, i = \overline{1, r}$ rădăcinile ecuației caracteristice de multiplicitate $q_i, \sum_{i=1}^r q_i = n$. Atunci $P(s)$ se poate scrie

$$P(s) = (s - \lambda_1)^{q_1} (s - \lambda_2)^{q_2} \dots (s - \lambda_r)^{q_r}. \quad (4.17)$$

Factorii din (4.17) care corespund rădăcinilor reale sunt de forma $(s - \lambda_i)^{q_i} = (s + \alpha_i)^{q_i}$ cu $\alpha_i > 0$, respectiv sunt polinoamele de grad q_i la care coeficienții tuturor termenilor sunt strict pozitivi.

Perechile de factori corespunzător unei perechi de rădăcini complex-conjugate $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$ (cu $\alpha_i > 0$), care au obligatoriu același ordin de multiplicitate $q_i = q_{i+1}$, conduc la un polinom de forma

$$[(s - \lambda_i)(s - \lambda_{i+1})]^{q_i} = (s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)^{q_i},$$

deci la un polinom de grad $2q_i$

cu coeficienții termenilor de toate gradele strict pozitivi.

Se obține deci următoarea condiție necesară de stabilitate:

Pentru ca un **sistem dinamic să fie (strict) stabil extern** este necesar ca **polinomul său caracteristic $P(s)$ (sau ecuația caracteristică $P(s) = 0$) să aibă toți coeficienții pozitivi.**

Cu coeficienții polinomului caracteristic se construiește un determinant de ordin n , egal cu gradul polinomului, numit determinantul Hurwitz.

Determinantul Hurwitz se construiește astfel: pe diagonala principală se trec coeficienții polinomului caracteristic $P(s)$ scris în ordinea descrescătoare a puterilor lui s , ca în relația (4.9), începând cu a_{n-1} ; pe fiecare coloană, sub diagonala principală se trec coeficienții termenilor de grad superior, iar deasupra diagonalei principale se trec coeficienții termenilor de grad inferior;

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

după epuizarea coeficienților locurile rămase libere se completează cu zerouri.

Criteriul de stabilitate Hurwitz se formulează astfel:

Teorema 4.4. O condiție necesară și suficientă pentru ca ecuația (4.9) să aibă toate rădăcinile situate în $Re s < 0$, respectiv ca sistemul cu funcția de transfer (2.109) să fie stabil, este ca toți determinanții

minori principali, inclusiv determinantul Hurwitz, să fie strict pozitivi

$$\det H_j > 0, j = \overline{1, n}. \quad (4.19)$$

Adică

$$H_1 = a_{n-1} > 0, H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0, H_n > 0.$$

Polinoamele caracteristice corespunzătoare sistemelor stabile se numesc *polinoame hurwitziene*.

Exemplul 4.3. Să se verifice dacă polinomul caracteristic

$$P(s) = s^4 + 2,7s^3 + 2,5s^2 + 0,9s + 0,1$$

este hurwitzian

Determinantul Hurwitz corespunzător este

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 & 0 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 2,7 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1 & 2,5 & 0,1 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = 2,7 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 \\ 1 & 2,5 \end{vmatrix} = 6,75 - 0,9 = 5,85 > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2,7 & 0,9 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,1 \\ 0 & 2,7 & 0,9 \end{vmatrix} = 4,5 > 0, H_4 = 0,1 H_3 = 0,45 > 0.$$

Polinomul este hurwitzian, $\det H_j > 0, j = \overline{1, 4}$

4.1.1.3. Criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard- Mihailov

Criteriul de stabilitate Cremer-Leonhard-Mihailov este un criteriu frecvențial care se poate aplica ușor și pentru sistemele dinamice de ordin mai ridicat, cu condiția ca polinomul caracteristic $P(s)$ să nu aibă rădăcini în $s = 0$

Enunt - Teorema 4.6. O condiție necesară și suficientă ca polinomul caracteristic $P(s)$ - relația (4.9), să fie hurwitzian (deci ca sistemul cu funcția de transfer (2.60) să fie stabil) este ca

$$\arg P(j\omega) \Big|_0^\infty = n \frac{\pi}{2}. \quad (4.21)$$

Demonstrație . Se utilizează teorema argumentului (relația (2.84))., conform careia, variația totală a argumentului polinomului de grad n , $P(j\omega)$, la variația frecvenței de la $-\infty$ la $+\infty$ este

$$\arg P(j\omega) \Big|_{-\infty}^\infty = n\pi. \quad (4.22)$$

Deoarece $P(s)$ are coeficienții reali rezultă că $P(j\omega)$ este simetric față de axa reală și în acest caz (4.22) se reduce la (4.21).

Acest criteriu se utilizează sub formă grafică, conform enunțului:

Teorema 4.7. O condiție necesară și suficientă ca $P(s)$ să fie hurwitzian este ca fazorul $P(j\omega)$ să parcurgă succesiv și în sens trigonometric pozitiv n cadrane, când ω variază de la 0 la ∞ .

Polinomul nu este hurwitzian și respectiv sistemul dinamic corespunzător nu este stabil, dacă sensul de parcurgere al cadranelor este invers trigonometric, sau dacă numărul cadranelor parcurse este mai mic decât gradul polinomului $P(s)$.

Exemplul 4.4. Se consideră sistemul dinamic liniar constant cu polinomul caracteristic

$$P(s) = 0,004s^5 + 0,1s^4 + 1,05s^3 + 2,8s^2 + 4,3s + 1,6.$$

Să se verifice dacă sistemul este asimptotic stabil cu criteriul Cremer-Leonhard-Mihailov. Se calculează $P(j\omega)$

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= 0,1\omega^4 - 2,8\omega^2 + 1,6 + j\omega(0,004\omega^4 - 1,05\omega^2 + 4,3) = \\ &= P_R(\omega) + jP_I(\omega). \end{aligned}$$

Se dau valori lui ω și se completează tabelul următor

ω	0	0,77	2,04	5,2	16,7	$+\infty$
$P_R(\omega)$	1,6	0	-8,32	0	6998,7	$+\infty$
$P_I(\omega)$	0	2,1	0	-110,-07	0	$+\infty$

În fig. 4.2 se prezinta hodograful $P(j\omega)$. Deoarece pentru $\omega \in [0, \infty)$ **hodograful parcurge succesiv în sens trigonometric pozitiv cinci cadrane, sistemul este asimptotic stabil**. Din tabelul de mai sus se observa ca rădăcinile partii reale $P_R(\omega)$ si ale partii imaginare $P_I(\omega)$ alterneaza în cazul sistemelor stabile.

Analiza stabilitatii unui sistem cu o structura data

Se considera conexiunile de baza, serie, paralel si cu reactie . Pentru simplitate se considera doar doua elemente cu functiile de transfer $H_i(s) = Q_i(s)/P_i(s)$, $i = 1,2$,

Functia de transfer echivalenta a conexiunii serie,

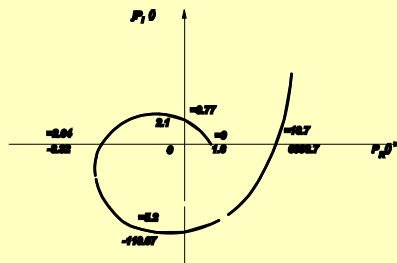


Fig. 4.2

$$H_s(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P_1(s)P_2(s)}. \quad (4.23)$$

iar cea a conexiunii paralel este

$$H_p(s) = H_1(s) \pm H_2(s) = \frac{Q_1(s)P_2(s) \pm Q_2(s)P_1(s)}{P_1(s)P_2(s)}. \quad (4.24)$$

Polinomul caracteristic al sistemului format din cele doua elemente este $P(s) = P_1(s)P_2(s)$, care este stabil dacă $P_1(s)$ si $P_2(s)$ sunt stabile

Rezulta ca orice structura obtinuta numai prin conectarea în serie sau în paralel a mai multor elemente stabile formeaza un sistem stabil.

În cazul conexiunii cu reactie a celor doua elemente, fig. 4.3.a, funcția de transfer echivalenta, conform relatiei (2.99) este Polinomul caracteristic al sistemului depinde si de polinoamele de la numaratorul functiilor de transfer.

$$H_0(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)} = \frac{Q_1(s)P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) \pm Q_1(s)Q_2(s)}. \quad (4.25)$$

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \pm Q_1(s)Q_2(s) \quad (4.26)$$

Deci problema stabilitatii sistemelor cu reactie trebuie analizată pentru fiecare caz în parte. Se constata usor ca structura cu reactie unitara din fig. 4.3.b are un polinom caracteristic identic cu cea din fig. 4.3.a, $H_1(s)$, $H_2(s)$ fiind aceleasi.

Se poate limita studiul stabilitatii sistemelor cu reactie la structurile cu reactie unitara, fig. 4.3.c, în care $H(s) = Q(s)/P(s)$ este funcția de transfer în circuit deschis, iar

$$H_0(s) = \frac{H(s)}{1 \pm H(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) \pm Q(s)} \quad (4.27)$$

este funcția de transfer în circuit închis.

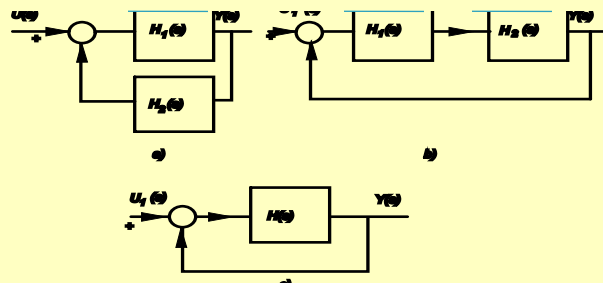


Fig. 4.3

4.1.1.4. Criteriul de stabilitate Nyquist

Criteriul de stabilitate Nyquist este de asemenea un **criteriu frecvential** care permite analiza stabilitatii unui **sistem cu reactie unitara negativa**, având forma din fig. 4.3.c (pe baza locului de transfer $H(j\omega)$ a sistemului în circuit deschis si a cunoasterii numarului de poli ai funcției $H(s)$ din semiplanul drept $\mathbf{C}^+ \{s \in \mathbf{C} / \text{Re } s \geq 0\}$ al planului complex s).

De remarcat ca în **orice sistem cu reactie neunitara fig. 4.4.a**, prin transfigurarea schemei bloc se poate pune în evidenta **o structura cu reactie unitara**, fig. 4.4.b, în **care pe legatura directa este funcția de transfer a sistemului deschis $H(s) = H_1(s)H_2(s)$** (a sistemului cu circuitul de reactie întrerupt în punctul P , fig. 4.4.a), **numita si funcție de transfer a circuitului sistemului**.

Marimea de intrare în structura închisa propriu-zisa din fig. 4.4.b se exprima prin

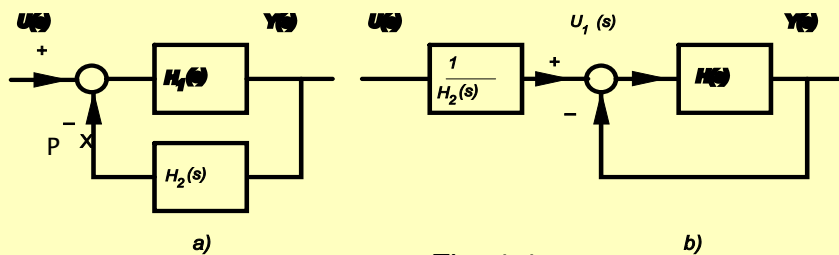


Fig. 4.4

$$U_1(s) = \frac{U(s)}{H_2(s)}. \quad (4.28)$$

Se considera ca functia de transfer a sistemului deschis este unde $P(s)$ si $Q(s)$ sunt doua polinoame de grad n si respectiv m cu $m \leq n$.

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (4.29)$$

Pentru structura închisa din fig. 4.3.c, respectiv fig. 4.4.b, functia de transfer se poate scrie

$$H_o(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{H(s)}{G(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) + Q(s)} \quad (4.30)$$

$$G(s) = 1 + H(s) = \frac{P(s) + Q(s)}{P(s)}. \quad (4.31)$$

Din criteriul fundamental de stabilitate se stie ca sistemul cu structura închisa cu functia de transfer (4.30) este stabil IMEM **daca polii sai sunt în $Re s < 0$, (C^-)**. Din (4.30) rezulta ca **polii sistemului închis sunt zerourile funcaiei $G(s)$** . Ca urmare **conditia de stabilitate este ca $G(s)$ sa nu aiba nici un zerou în semiplanul drept C^+ al planului complex ($Re s \geq 0$)**. Din (4.30) si (4.31) se constata ca **polii functiei $G(s)$ sunt chiar polii lui $H(s)$, adica polii sistemului în circuit deschis**.

Determinarea localizarii zerourilor functiei (4.31) se poate face cu ajutorul teoremei argumentului (relatia (2.84)) aplicata functiei $G(s)$, atunci când s parcurge conturul Nyquist, fig. 2.9.

Din relatia (4.31) se observa ca $G(s)$ este raportul a doua polinoame de grad n . În aceste conditii punctul de la ∞ *nu introduce nici o variatie a argumentului fazorului $G(j\omega)$ pentru $\omega \in \mathbf{R}$* . **Daca $G(s)$ are z zerouri si p poli în $Re s > 0$, z_0 zerouri si p_0 poli pe axa imaginara ($Re s = 0$)**, din teorema argumentului rezulta

$$\arg G(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi(z - p) - \pi(z_0 - p_0). \quad (4.32)$$

Dar sistemul închis este stabil IMEM **daca si numai daca $G(s)$ nu are zerouri în $Re s \geq 0$, adica daca si numai daca $z = 0$, $z_0 = 0$** , atunci din (4.32) se obtine

$$\arg G(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi p + \pi p_0. \quad (4.33)$$

Pe baza relatiei (4.33) se poate enunta criteriul Nyquist :

Teorema 4.8. Un sistem dinamic liniar constant monovariabil neted cu structura închisa, cu functia de transfer (4.30) este stabil IMEM

daca si numai **daca variatia argumentului fazorului $G(j\omega)$** , pentru $\omega \in \mathbf{R}$ satisface relatia (4.33), deci **daca acest fazor înconjoara originea planului $G(j\omega)$ de $(p + p_0/2)$ ori în sens trigonometric pozitiv, fig. 4.5, când $\omega \in \mathbf{R}$.**

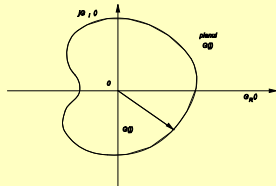


Fig. 4.5

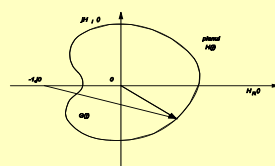


Fig. 4.6

Deoarece polii functiei $G(s)$ coincid cu polii functiei de transfer a sistemului deschis $H(s)$ rezulta ca asupra sistemului deschis nu se pun restrictii, acesta putând fi instabil (daca $p \neq 0$, $p_0 \neq 0$), $p, p_0 \in \mathbf{C}^+$.

Pentru verificarea practica a conditiei (4.33) este suficient sa se reprezinte grafic hodograful $H(j\omega)$.

Hodograful $G(j\omega)$ se poate obtine din hodograful $H(j\omega)$ prin raportarea la o noua origine $(-1, j0)$, în planul $H(j\omega)$, fig. 4.6.

Se poate acum formula criteriul Nyquist astfel:

Teorema 4.9. Un sistem dinamic liniar constant monovariabil neted **cu structura închisa** cu functia de transfer (4.30) **este stabil IMEM** daca si numai **daca locul de transfer al sistemului deschis (hodograful $H(j\omega)$) înconjoara punctul $(-1, j0)$ de $(p + p_0)/2$ ori în sens trigonometric pozitiv**, când ω variaza de la $-\infty$ la $+\infty$.

Daca sistemul deschis este stabil IMEM, respectiv $p = 0$, $p_0 = 0$, criteriul Nyquist se numeste criteriul Nyquist simplificat si se enunta astfel:

Teorema 4.10. Un sistem dinamic liniar monovariabil cu structura închisa, cu functia de transfer (4.30) si sistemul deschis stabil IMEM, este stabil IMEM **daca si numai daca** locul de transfer $H(j\omega)$ al sistemului deschis

nu înconjoara punctul $(-1, j0)$ atunci când ω variaza de la $-\infty$ la $+\infty$.

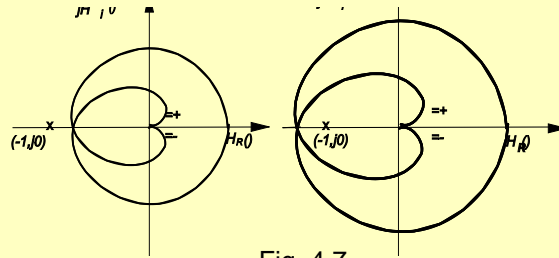


Fig. 4.7

Astfel, în ipoteza ca $H(s)$ este funcția de transfer a unui sistem stabil IMEM, prin aplicarea criteriului Nyquist simplificat se deduce ca **locul de transfer din fig. 4.7.a** corespunde unui **sistem stabil** în circuit închis, iar **locul de transfer din fig. 4.7.b** corespunde unui **sistem instabil**.

Poziția punctului $(-1, j\omega)$ față de hodograful $H(j\omega)$ poate fi determinată cu ușurință dacă se hasurează partea dreaptă a curbei $H(j\omega)$ pentru sensul crescător al pulsatiei, ca în fig. 4.7.b.

Dacă punctul $(-1, j0)$ este într-o zonă hasurată, locul de transfer înconjoară acest punct și deci sistemul închis este instabil IMEM.

Un caz limită interesant corespunde condiției

$$H(j\omega) = -1 \quad (4.34)$$

când locul de transfer $H(j\omega)$ trece prin punctul $(-1, j0)$. Aceasta înseamnă că $G(s) = 1 + H(s)$ are zerouri, respectiv $H_0(s)$ are poli, pe axa imaginara ($\text{Re } s = 0$).

Dacă aceste zerouri sunt simple sistemul închis nu este stabil IMEM (sistemul este la limita de stabilitate). Din această cauză **punctul $(-1, j0)$** se mai numește și **punct critic**. Stabilitatea IMEM a sistemului deschis $H(s)$, se poate studia determinând variația argumentului fazorului $H(j\omega)$ față de originea planului $H(j\omega)$. Aplicând teorema argumentului, pentru $p = 0$, $p_0 = 0$, rezulta:

Teorema 4.11. Un sistem dinamic deschis este stabil IMEM daca si numai daca variatia argumentului este

$$\arg H(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi z_0 - (n-m)\pi \quad (4.35)$$

unde z si z_0 sunt numarul de zerouri din $Re s > 0$ si respectiv de pe axa imaginara, $Re s = 0$, ale functiei $H(s)$.

Avantajele esentiale ale criteriului Nyquist: a) utilizând locul de transfer $H(j\omega)$ se poate aprecia atât **stabilitatea sistemului deschis cu functia de transfer $H(s)$** , cât și **stabilitatea sistemului închis cu reacie negativa unitara** cu functia $H(s)$ pe calea directa. b) posibilitatea de a aprecia gradul de stabilitate al unui sistem în circuit închis pe baza notiunii de **stabilitate relativa IMEM**.

Se considera locul de transfer $H(j\omega)$ al unui sistem stabil în circuit deschis prezentat în fig. 4.8. Se evidentiaza pulsatiile ω_1 si ω_π pentru care

$$|H(j\omega_1)| = 1 \quad \arg H(j\omega_\pi) = -\pi \quad (4.40)$$

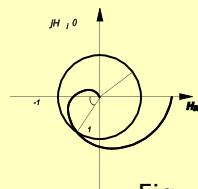


Fig. 4.8

Pentru pulsatia ω_1 locul de transfer al sistemului deschis $H(j\omega)$ taie cercul de raza unitara, iar pentru pulsatia ω_π acest loc taie axa reala.

Stabilitatea relativa se apreciaza prin:

- marginea de amplificarea (de câstig) m

$$m = \frac{1}{|H(j\omega_\pi)|}; \quad (4.41)$$

- marginea de faza

$$\gamma = \pi - |\arg H(j\omega_1)|. \quad (4.42)$$

Se poate aprecia ca **sistemele închise stabile IMEM** au o **comportare cu atât mai buna cu cât hodograful $H(j\omega)$ este mai departat de punctul critic $(-1, j0)$** . Aceasta implica valori mari pentru marginea de amplificare m si marginea de faza γ . **Stabilitatea relativa se considera practic satisfacuta daca $m \geq 3$ si $\gamma \geq 30^\circ$** .

Marginea de faza si marginea de amplificare (exprimata în dB) pot fi determinate si din diagrama Bode asa cum se precizeaza în fig. 4.9.

Pulsatia ω_1 pentru care $|H(j\omega)| = 1$, $A_{dB}(\omega) = 0$, caracteristica atenuare-frecventa taie axa absciselor se numeste **pulsatie de taiere**. Marginea de amplificare exprimata în decibeli este egala cu modulul atenuarii la pulsatia ω_π

$$m_{dB} = |A_{dB}(\omega_\pi)|, \arg |H(j\omega_\pi)| = -\pi \quad (4.43)$$

iar marginea de faza se determina cu

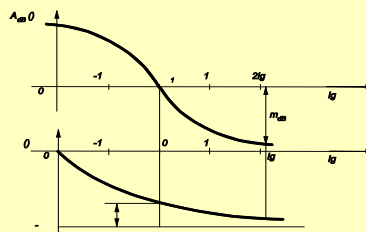


Fig. 4.9

$$\gamma = 180^\circ - |\arg H(j\omega_1)|; |H(j\omega_1)| = 1, A_{dB}(\omega_1) = 0. \quad (4.44)$$

Se recomanda urmatoarele valori pentru o stabilitate IMEM satisfacatoare: $m_{dB} = 10 - 20 \text{ dB}$ si $\gamma = 30^\circ - 50^\circ$.

Exemplul 4.5. Se considera un sistem cu functia de transfer în circuit deschis

$$H(s) = \frac{k_p}{(s-a)(s+b)}, k_p > 0, a > 0, b > 0.$$

Sa se studieze stabilitatea sistemului închis cu reactie unitara utilizând criteriul Nyquist.

Deoarece $H(s)$ are un pol în $\text{Re } s > 0$, $\lambda_1 = a > 0$, sistemul în circuit închis va fi stabil dacă, conform relației (4.33), pentru

$$p = 1, p_0 = 0 \quad \arg G(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

deci dacă locul de transfer $H(j\omega)$ va înconjura o dată, în sens trigonometric pozitiv, punctul critic $(-1, j0)$. Din răspunsul la frecvența $H(j\omega)$ rezulta

$$H_R(\omega) = \frac{-k_p(ab + \omega^2)}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}; H_I(\omega) = \frac{k_p\omega(a-b)}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}$$

cu care se trasează locul de transfer. Pentru diferite valori ale parametrilor k_p, a, b , acest loc are formele din fig. 4.10.a,b,c.

Se observa că sistemul în circuit închis este stabil IMEM numai dacă $b > a$ și $k_p > ab$, fig. 4.10.c, când $\arg G(j\omega) = 2\pi$. În fig.4.10.a, $\arg G(j\omega) = -2\pi$, iar în fig. 4.10.b $\arg G(j\omega) = 0$.

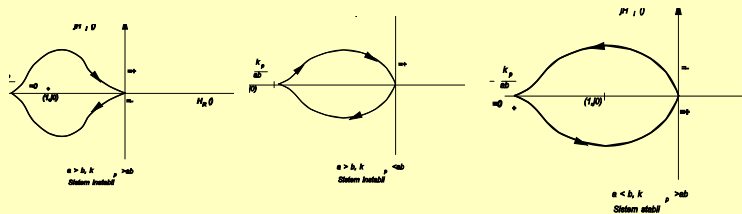


Fig. 4.10