1.3.3. Descrierea matematică a semnalelor

1.3.3.1. Semnale definite printr-o sumă

- **Aparatele** cu care se **măsoară** diferite semnale **analogice** au o **comportare integratoare**. Un semnal *x(t)* aplicat la intrarea unui asemenea aparat determină apariţia la ieşirea acestuia a unui semnal
- $$I = \int x(\sigma)d\sigma$$

Integrala (1.3) poate fi aproximată printr-o sumă discretă. Intervalul de integrare $[0, t_0]$ este divizat în k_0 intervale de durată identică T (fig.1.9) $\sigma = i \cdot T$, i fiind un indice curent întreg.

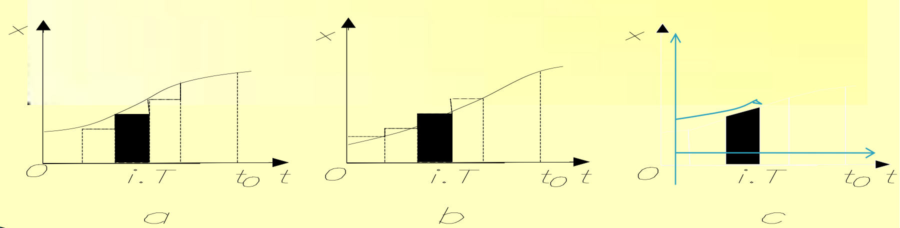
Aplicând **metoda dreptunghiurilor** (fig. 1.9.*a* şi fig. 1.9.*b*) respectiv **metoda trapezelor** (fig. 1.9.*c*), se stabilesc următoarele expresii recursive

$$I(i) = I(i-1) + T \bullet x(i-1);$$

$$i = \overline{1, k_0},\ I(0) = 0;$$

$$I(i) = I(i-1) + T \bullet x(i);$$

$$I(i) = I(i-1) + T \bullet [x(i) + x(i-1)] / 2.$$



1.3.3.2. Semnale definite printr-o diferenţă

- Sunt **semnale analogice** care se pot defini ca **derivate *dx(t)/dt*** ale unor funcţii *x(t)*. Derivata într-un punct este limita unei diferenţe

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Pentru **semnalele numerice** se pot defini două funcţii *diferenţe finite*:

- forma *avansată* , (1.9.a),

$$Ax(k) = x(k+1) - x(k)$$

- forma *întârziată* (1.9.b).

$$Ix(k) = x(k) - x(k-1)$$

Derivata *dx/dt* a unei funcţii *x(t)* poate fi aproximată printr-o diferenţă (cu o eroare admisibilă):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

cu esantioane in avans

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

cu esantioane intarziate

1.3.3.3. Semnale definite printr-o distribuţie

1.3.3.3.1. Noţiunea de distribuţie

- Se consideră un exemplu: **circuitul electric fără rezistenţă** din fig. 1.10. Se presupune ca la momentul *t* = *0*, se închide comutatorul *K*. **Tensiunea** la bornele condensatorului va fi

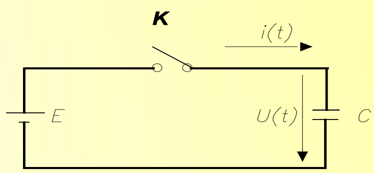


Fig. 1.10

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 . \end{cases}$$

Curentul *i(t)* se calculează cu relaţia

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

- Curentul *i(t)* este nul tot timpul exceptând, $t = 0$, unde nu se poate calcula pentru că *u(t)* este o funcţie discontinuă.
- Curentul *i(t)* există la $t = 0$, pentru că are loc un transfer de sarcină $Q = C \cdot E$ de la sursa de tensiune la condensator. Deşi ***i(t)* nu este accesibil**, **este o certitudine**, deoarece apare sarcina *Q* pe armăturile condensatorului. Dar curentul *i(t)* se exprimă prin

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Integrala Riemann a *functiei i(t)* aproape peste tot nula, nu este nulă. *i(t)* nu este o *funcţie* ci o *distribuţie*.

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\, dt = C \bullet E$$

Noţiunea de distribuţie este o **generalizare a noţiunii de funcţie.** O funcţie *f* este un *procedeu* care, pentru fiecare număr din domeniul de definiţie, asociază un alt număr din domeniul valorilor.
O *distributie T* este un ***procedeu*** care, **pentru fiecare funcţie** φ dintr-un domeniu de definiţie, **asociază un număr notat** $< T, \varphi >$ sau $T(\varphi)$.
Funcţiile pe care opereaza distributiile *T* aparţin unui domeniu *D*. Funcţiile φ satisfac condiţii severe. Se precizează condiţiile care conferă distribuţiei *T* proprietăţi remarcabile:

a) **funcţiile** φ **sunt nule** în afara unui interval Ω ;

b) funcţiile φ sunt **indefinit derivabile**;

c) pe *D* - domeniul funcţiilor φ, este **definită functia *normă***,

$\|.\|$, care permite să **masoare *distanţa*** dintre două funcţii

$\| \varphi_2 - \varphi_1 \|$.

Un exemplu de asemenea funcţie φ definită de Schwartz este

$$\varphi : t \to \varphi(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq a \\ e^{-\frac{a^2}{a^2 - t^2}} & |t| < a \end{cases}$$

şi are graficul din fig. 1.11

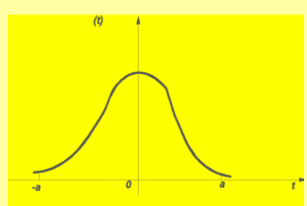


Fig. 1.11

O **distribuţie pe D** este un **procedeu T, liniar şi continuu**, care pentru orice funcţie φ din D asociază numărul < T, φ >. Liniaritatea implică satisfacerea relaţiei

$$< T, a\varphi_1 + b\varphi_2 > \; = \; a < T,\varphi_1 > + b < T,\varphi_2 >$$

Exemple

1. Fie o **funcţie continuă f, integrabilă** pe orice interval finit. **Se poate defini** o **distribuţie notată [f]** care la $\varphi \in D$ asociază numărul

$$< [\, f \,], \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt.$$

2. Fie T distribuţia care asociază lui φ numărul $< T, \varphi > = \varphi(0).$

T este distributia Dirac δ. $< \delta, \varphi > = \varphi(0)$

Nu există funcţia δ astfel ca $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$

Aceasta pentru că δ este **singulară.** Se defineşte δ_a astfel ca < δ_a, φ > = φ (a).

Distribuţiile regulate [f] asociate la anumite **funcţii** sunt **definite printr-o integrală**. Distribuţiile singulare, de tipul celei Dirac, δ sau δ_a nu corespund la o funcţie.

Pot aparea doua confuzii:

- se confundă f cu [f], adică funcţia cu distribuţia
- se defineşte δ ca o distribuţie asociată unei funcţii $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)\, ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\, dt = \varphi(a)$$

1.3.3.3.2. Proprietăţi ale distribuţiilor utile în teoria semnalelor

- **a) Egalitatea a două distribuţii** T_1 şi T_2

  $T_1 = T_2$ daca $< T_1, \varphi > = < T_2, \varphi >$

  pentru orice functie $\varphi(t)$ din D.

- **b) Produsul unei funcţii *g* printr-o distribuţie *T***

  Fie g o funcţie indefinit derivabilă.

  $gT = T_g$ este o distribuţie definită prin

$$< g\,T,\varphi > = < T_g\,,\varphi > = < T, g\,\varphi >$$

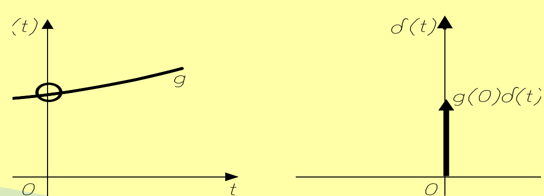
Produsul $g\varphi$ este produsul algebric a două funcţii.

Se aplică această definiţie la distribuţia Dirac δ. Se formează distributia $g\delta$, notată impropriu $g(t)\delta(t)$

$$< g\,\delta,\varphi > = < \delta, g\,\varphi > = g(0)\varphi(0) =$$
$$= g(0) < \delta,\varphi > = < g(0)\,\delta,\varphi >$$

Deci $$g\,\delta = g(\,0\,)\,\delta$$

$g(0)$ este *eşantionul* extras de distribuţia Dirac



c) derivarea unei distribuţii

Derivata *T'* a unei distribuţii *T* este definită prin procedeul

$$<T',\varphi> = -<T,\varphi'>$$

Deoarece φ este indefinit derivabilă şi *T* va fi de asemenea. Cum φ' există, prin definiţie o distributie *T* este totdeauna derivabilă

Fie o funcţie *f* continuă, deci peste tot derivabilă şi [*f*] distribuţia regulată asociată. Derivata [*f*]' a acestei distributii este

$$<[\,f\,]',\varphi> = -<[\,f\,],\varphi'> = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\,f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = <[\,f'\,],\varphi>$$

Integrala s-a calculat prin părţi. Termenul $f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ este nul pentru că **φ = *0* la infinit.**

Rezultă că în acest caz derivata distribuţiei este egală cu distribuţia asociată derivatei funcţiei.

Fie o funcţie *f* care nu este derivabilă în *a* ; *f* este discontinuă în punctul *a*, fig. 1.13.
Distribuţia *[f]* există pentru că *f* este local integrabilă. Derivata distribuţiei *[f]'* există pentru ca toate distributiile sunt derivabile şi se calculeaza cu relatiile

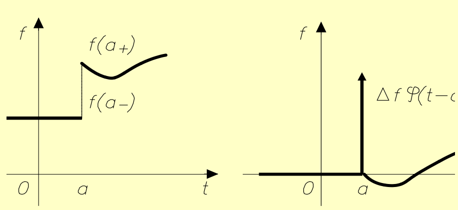


Fig. 1.13

$$<[\,f\,]',\varphi> = <-[\,f\,],\varphi'> = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{a} f(t)\varphi'(t)\,dt\, -$$

$$-\int_{a}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\{\,f\,\varphi\,\}_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'\varphi\,dt + \int_{a}^{\infty} f'\varphi\,dt - \{\,f\,\varphi\,\}_{a}^{\infty}$$

φ(t) este nula la infinit şi continua în *a*; *f(a)* nu exista; trebuie sa luam $f(a_-)$ sau $f(a_+)$; *f'* există peste tot în afară de punctul *a*, ceea ce nu deranjează integrarea. Se obţine deci

$$< [\ f\ \ ]',\varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt - f(a_-)\,\varphi(a) + f(a_+)\,\varphi(a) =$$
$$= < [\ f'\ ],\varphi > + \{f(a_+) - f(a_-)\}\,\varphi(a) =$$
$$= < [f'],\varphi > + \Delta f\ < \delta(t-a),\varphi > \qquad (1.28)$$

S-a ţinut seama că $\Delta f = f(a_+) - f(a_-)$ - saltul lui *f* în *a*,
$\varphi(a) = < \delta(t-a), \varphi >$ - (notaţie improprie).
Din egalitatea (1.28), adevărată oricare ar fi *φ*, rezultă că

$$[\ f\ ]' = [\ f'\ ] + \Delta f\ \delta(t-a). \qquad (1.29)$$

Relaţia (1.29) este o egalitate între distribuţii şi nu între funcţii.

Se consideră spre exemplu că funcţia *f(t) = σ(t)*, funcţia treaptă Heaviside (treaptă unitară

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Aplicând (1.29) rezultă $\quad [\ \sigma\ ]' = [\ 0\ ] + 1\delta(t).$

pentru că *σ' = 0·* *σ'* este derivata ordinară a unei funcţii constante.
Această relaţie se scrie adesea $\quad \sigma' = \delta\,(t).$

Adica distributia Heaviside prin derivare devine distritbutia Dirac

1.3.4. Reprezentarea temporala a semnalelor continue în timp si discrete în timp

Semnale continue în timp deterministe

1. Semnalul treapta unitara *σ(t)* sau functia Heaviside este definita de relatia

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases} \qquad (1.32)$$

si are graficul din fig. 1.14. $\sigma(t)$ nu este definita pentru $t = 0$; $\sigma(0_+) = 1$ si $\sigma(0_-) = 0.$

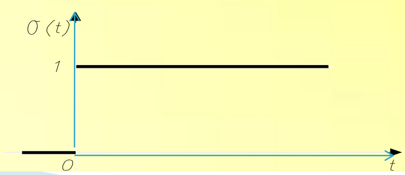


Fig.1.14

Functia treapta unitara reala $\sigma_\varepsilon(t)$ este definita de relatia

$$\sigma_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon}\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) & -\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2} \\ 1 & t > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \qquad (1.33)$$

si are graficul din fig. 1.15.

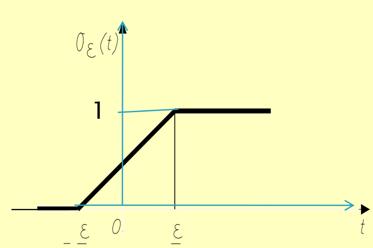


Fig. 1.15

Se considera ca $$\sigma(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon(t) \qquad (1.34)$$

2. **Impulsul unitar *δ(t)*. Impulsul Dirac**

Derivand pe $\sigma_\varepsilon(t)$ se obtine $\delta_\varepsilon(t)$ care este un **impuls dreptunghiular de amplitudine 1/*ε*** si **durata *ε*** (în intervalul [- *ε/2* , *ε/2*]), fig. 1.16.a :

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < -\dfrac{\varepsilon}{2} \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & -\dfrac{\varepsilon}{2} < t < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & t > \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

(1.35)

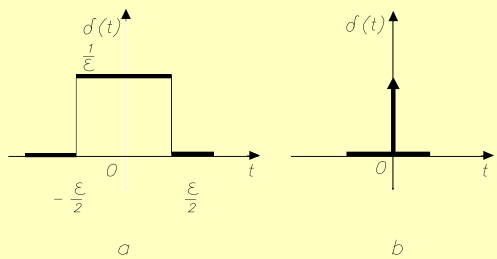


Fig. 1.16

Se observa ca **aria acestui impuls este egala cu *1*** oricare ar fi *ε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1 \quad t \in \Re. \qquad (1.36)$$

Daca ***ε* tinde la zero**, *δ* nu tinde catre o limita în sensul functiilor; dar ***δ*, în sensul distributiilor**, **tinde spre distributia Dirac, *δ(t)*,** fig. 1.16.b:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} +\infty & pentru\ \ t = 0 \\ 0 & pentru\ \ t \neq 0 \end{cases} \qquad (1.37)$$

$\delta_\varepsilon(t)$ este derivata lui $\sigma_\varepsilon(t)$. ***σ(t)* nu este derivabila în zero** în sensul functiilor, dar **este derivabila în sensul distributiilor** si deci

$$\delta(t) = [\ \sigma\ ]' = D\,\sigma(t) = \sigma(t). \qquad (1.38)$$

Notatia *δ(t)* = *σ'(t)*, este incorecta, corespunde formalismul ui functiilor si nu a distributiilor.

Reluând integrala (1.36) se scrie relatia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (1.39)$$

care este un mod de definitie a lui *δ(t)*. **Impulsul Dirac *δ(t)*** se numeste **unitar pentru ca masura** sa, sau ponderea sa, sau **aria sa este 1**.

3. Semnalul rampa unitara *r(t)*

Semnalul rampa unitara este definit de relatia

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0. \end{cases} \qquad (1.40)$$

Graficul lui *r(t)* este prezentat în fig. 1.17.

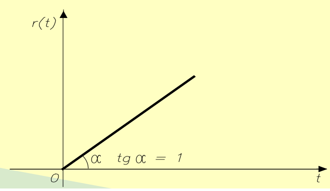


Fig. 1.17

4. Semnalul armonic sinusoidal

Semnalul sinusoidal este un semnal periodic. Se foloseste frecvent sinusoida eterna (necauzala):

$$u(t) = \sin \omega t \quad sau \quad u(t) = \cos \omega t. \qquad (1.41)$$

Se utilizeaza acest semnal pentru a studia comportarea sistemelor în domeniul frecventelor. Se foloseste de asemenea semnalul matematic $e^{j\omega t}$ mult mai simplu de manipulat:

$$u(t) = e^{j\omega t} \qquad (1.42)$$

Cu aceasta semnalul sinusoidal poate fi exprimat:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}; \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}. \qquad (1.43)$$

5. Semnalul cauzal întârziat

Un semnal cauzal întârziat *x(t)* este repreze-tat în fig. 1.18 si este definit de relatia

$$x(t) = f(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ f(t-\tau) & t \geq \tau. \end{cases} \qquad (1.44)$$

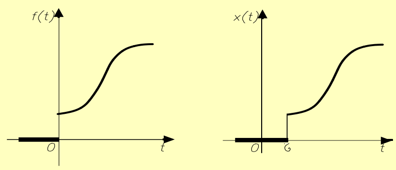


Fig. 1.18

1.3.4.2. Semnale discrete în timp

- **1.3.4.2.1. Semnale numerice naturale**

- Numarul calatorilor care pleaca dintr-o gara, într-o zi, este reprezentat printr-un **semnal numeric**. Acest numar depinde de numarul trenului, fiecarui tren atribuindu-i-se un numar întreg *1, 2,...*, *n*.
- **Semnalul numeric este o functie *x***, care la orice *k* (numarul trenului) asociaza un numar real *x(k)* (numarul calatorilor) :

$$x : k \to x(k);\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

- Pentru a pune în evidenta caracterul discret al dependentei de variabila *k*, functia *x* va fi notata [*x(k)*] sau [*x(kT)*]; *x(k)* reprezinta valoarea reala a acestei functii în *k*.

1.3.4.2.2. Semnale numerice esantionate

- Valorile zilnice ale temperaturii într-o statie meteorologica sunt numere prelevate în fiecare zi ($T = 1$ zi) pe un semnal continuu $x(t)$. Semnalul obtinut este un semnal discret [$x(kT)$]. ***T*** - este o constanta pozitiva cu dimensiuni de timp, numita **pas de discretizare sau perioada de esantionare**. Functia [$x(kT)$] este chiar functia $x(t)$ pentru care **variabila continua *t*** a fost restrânsa la multipli întregi ai perioadei de esantionare: kT, $k \in \boldsymbol{Z}$. Numarul $x(kT)$ este deci obtinut luând $t = kT$ în $x(t)$.
  - Pentru perioada de esantionare $T = 1$, se scrie [$x(k)$] pentru [$x(kT)$] pentru un semnal discret oarecare.

Un semnal esantionat este format dintr-o succesiune de impulsuri care rezulta din esantionarea (testarea) unui semnal continuu pe o durata de timp $\Delta t = \varepsilon \to 0$ si la intervale de timp T, de obicei constante.

Se considera circuitul din fig. 1.30. Tensiunea $u_1 = x(t)$ este masurata cu voltmetrul V conectat prin intermediul întrerupatorului I, închis periodic cu o perioada T. Întrerupatorul I ramâne închis un timp foarte scurt $\varepsilon \ll T$, dar suficient de lung pentru ca acul voltmetrului sa *aiba timp sa devieze si sa sesizeze impulsul* $x_e(t)$ la care este supus.

Prin **esantionare simpla**, dintr-un **semnal continuu** se obtine un **tren de impulsuri analogice de durata *ε*** a caror **amplitudine coincide cu semnalul analogic** din intervalele de timp $(kT, kT + \varepsilon)$, fig. 1.31. *Elementul de impuls* transforma un semnal continuu, aplicat la intrarea sa, într-un semnal discret obtinut la iesire

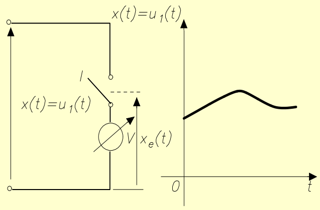


Fig. 1.30

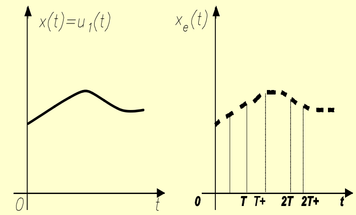


Fig. 1.31

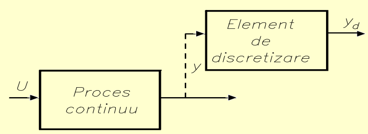


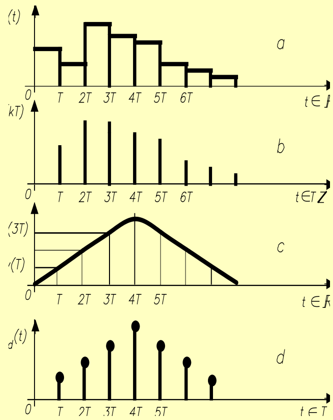
Fig. 1.32

Pentru un proces cu o intrare *u(t)* si o iesire *y(t)*, fig. 1.32, ambele scalare si continue, în cazul conducerii cu calculatorul numeric, **marimea de intrare va avea o variatie *în scara***, fig. 1.33.*a*, (numita **functie cuantificata,** daca multimea valorilor

este numarabila) notata $\bar{u}(t)$. Functia scara $\bar{u}(t)$ are expresia

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u(kT) & kT \le t < (k+1)T. \end{cases} \qquad (1.75)$$

Functia scara $\bar{u}(t)$ este complet definita prin valorile ei în momentele de discretizare $t = kT$, $k \in \mathbf{Z}$, fig. 1.33.*b*. Marimea de iesire *y(t)* , fig. 1.33.*c* este o functie continua. Pentru calculul marimii de comanda a procesului calculatorul va prelua valorile acestela la momentele kT, $k \in \mathbf{Z}$, fig. 1.33.*d*.



$\bar{u}(t)$ – marimea de intrare functie scara

u(kT) – marimea de intrare discreta

y(t) – marimea de iesire continua

Y(kT) – marimea de iesire discreta

Fig. 1.33

1.3.4.2.3. Semnale esantionate tipice

- 1. **Treapta unitara si cauzala σ(kT) = σ(k)**

Este definita de relatia

$$\sigma(k)=\begin{cases} 0 & k<0 \\ 1 & k\geq 0 \end{cases} \qquad (1.76)$$

si are graficul din fig. 1.34

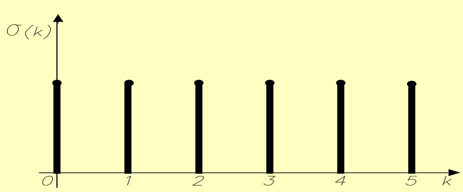


Fig.1.34

$$\delta(k)=\begin{cases} 0 & k\neq 0 \\ 1 & k=0 \end{cases}$$

***2.* Impulsul Dirac unitar si centrat δ(kT) = δ(k)**

Este definit de relatia

$$\delta(k)=\begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \qquad (1.77)$$

si are graficul din fig. 1.35.

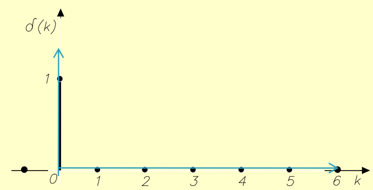


Fig.1.35

3. Rampa unitara r(kT) = r(k)

Este definita de relatia

$$r(k)=\begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases} \qquad (1.78)$$

si are graficul din fig. 1.36.

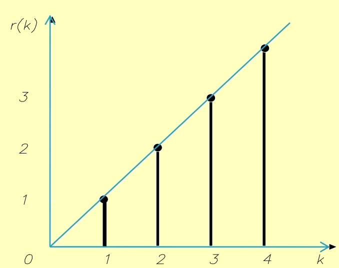


Fig. 1.36

4. Semnalul întârziat sau avansat

Se defineste **operatorul de deplasare înapoi cu un pas** (de întârziere cu un pas) notat cu q^{-1} cu relatia

$$g = q^{-1} f = \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(k) = f(k-1), \; k \geq 1 \end{cases} \qquad (1.79)$$

si **operatorul de deplasare înainte cu un pas** (avans cu un pas), notat **cu *q*,** cu relatia

$$g = q\,f = \begin{cases} g(k) = f(k+1)\,, & k \geq 0 \\ g(k) = 0 & ,k < 0 \end{cases} \qquad (1.80)$$

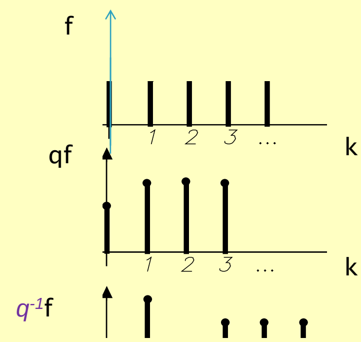


Fig.1.37