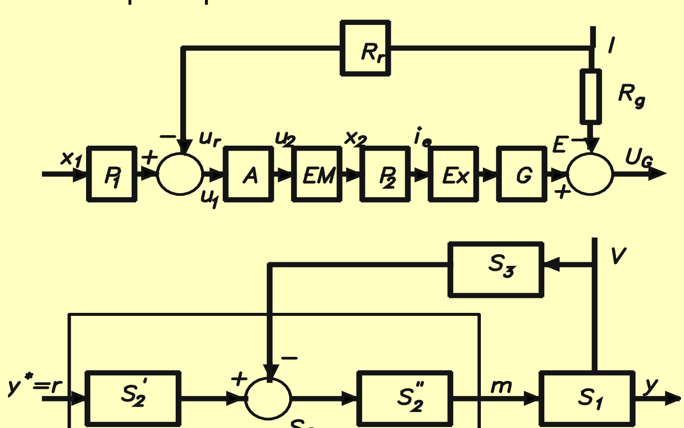
În schema bloc se pun în evidenta **doua subsisteme înseriate** reprezentate în fig. 1.56.b : ***S_1*** **- subsistemul principal (condus)** asigura dependenta marimii de iesire ***y*** de marimea de executie ***m*** ; ***S_2*** **- subsistemul de comanda** asigura dependenta marimii de executie ***m*** de marimea de intrare în sistem, care este marimea impusa (dorita) ***y^**** (sau de referinta ***r***).

Asupra subsistemelor S_1 si S_2 actioneaza deseori si alte **marimi exterioare** (de exemplu *v* în fig. 1.56.b) care, au de obicei, un **caracter perturbator**.

In cazul generatorului - marimea perturbatoare este curentul *I*. Tensiunea U_G scade la cresterea curentului *I* datorita caderii de tensiune pe rezistenta R_g a rotorului, conform relatiei (1.206).

a_2) Sistemele de compensare automata **-** functioneaza pe principiului compensarii efectului nedorit al marimilor perturbatoare. – principiu Victor Poncelet – savant francez



Fig, 1.57

Pentru **eliminarea sau diminuarea efectului perturbatiilor** asupra marimii de iesire se introduce un **subsistem S_3** (fig. 1.57), astfel încât **marimea de executie *m* sa depinda si de perturbatia *v*.**

Sistemul obtinut este tot cu **structura deschisa** deoarece nu exista nici un element la care marimea de intrare sa depinda de marimea de iesire direct sau indirect.

În cazul sistemului de reglare a tensiunii generatorului de curent continuu, **fig. 1.58** pentru compensarea perturbatiilor se utilizeaza un semnal proportional cu curentul I, $u_r = R_r I$, tensiunea de intrare în amplificatorul A devine: $u_1 = u_i - u_r$. Tensiunea u_i *corespunde* valorii dorite a tensiunii U_G. La cresterea curentului I, U_G scade, creste u_r , scad : u_1 , u_2 si forta F dezvoltata de electromagnet.

Forta F_r devine mai mare decât forta F si armatura electromagnetului se deplaseaza în sensul micsorarii rezistentei potentiometrului P_2 din circuitul de excitatie al generatorului.

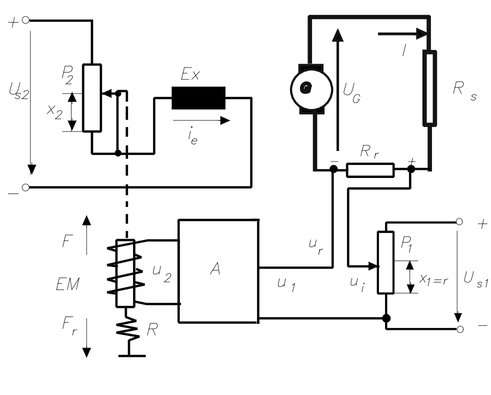


Fig. 1.58

Ca urmare, cresc i_e si tensiunea electromotoare *E* , iar tensiunea U_G tinde la valoarea dorita. În acest fel efectul perturbatiei este compensat. În acest sistem curentul de excitatie i_e, deci marimea de executie *m* , devine dependent si de curentul *I* (perturbatia din sistem).

b) Sisteme dinamice cu structura închisa

- **contin cel putin un subsistem la care marimea sa de intrare este influentata de marimea de iesire direct sau indirect**. Structura cea mai simpla a acestor sisteme (fig. 1.59) cuprinde urmatoarele subsisteme: **subsistemul principal (condus)** S_1 care asigura o anumita dependenta a marimii de iesire *y* de marimea de executie *m* ; **subsistemul secundar (de reactie)** S_2 asigura reactia inversa (feed-back), prin care se transmit informatii despre evolutia marimii de iesire la **subsistemul** S_3 **;**

Subsistemul decizional S_3 asigura o ***decizie* asupra tipului** si modului de variatie a **marimii de executie *m*** , pentru a se realiza tranzitia intrare-iesire dorita. Acest subsistem utilizeaza un algoritm în care marimea de intrare *u* si de reactie y_r au un rol important

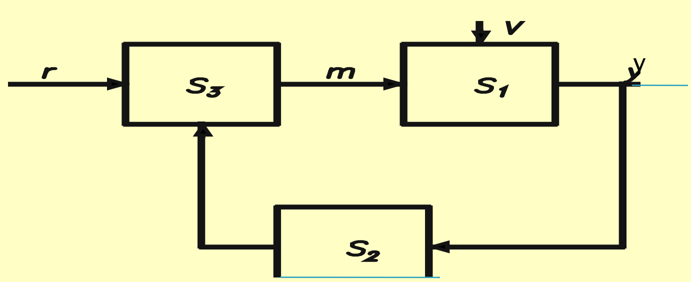


Fig. 1.59

Din aceasta grupa fac parte sistemele cu schema bloc din fig. 1.60 în care subsistemele S_3 realizeaza o comparatie liniar - aditiva între o variabila r_1 , dependenta de r , si y_r dependenta de marimea de iesire y , de forma $r_1 \pm y_r$

apoi pe baza unui algoritm se obtine marimea de executie m .

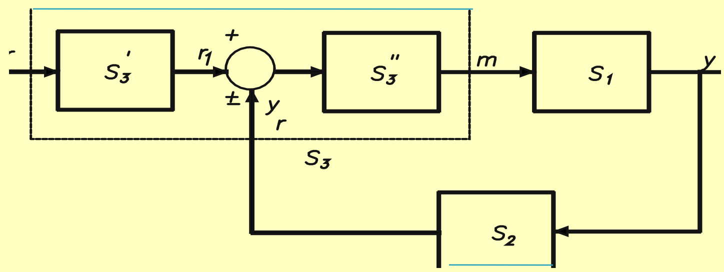


Fig. 1.60

Daca $\varepsilon = r_1 - y_r$ **sistemul** se numeste cu **reactie inversa negativa** sau ***sistem de reglare automata*** . Marimea ε se numeste ***abatere*** sau ***eroare***. Daca $r_1 = r = y^*$; $y_r = y$, $\varepsilon = y^* - y = r - y$ reprezinta efectiv abaterea dintre valoarea impusa (de referinta) si valoarea reala a marimii reglate.

Pentru generatorul de curent continuu - schema din fig. 1.61.

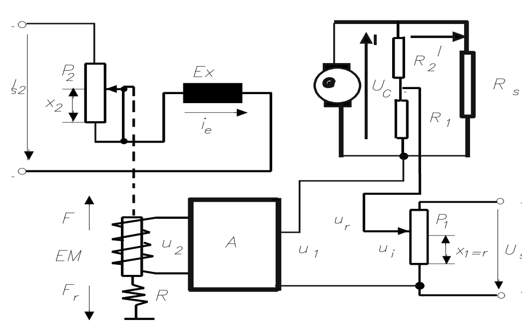


Fig. 1.61

Se utilizeaza un semnal u_r egal sau proportional cu U_G, care se compara cu u_i . Tensiunea de intrare în amplificator este: $u_1 = u_i - u_r$. La scaderea tensiunii U_G, deci a lui u_r, cresc: u_1, u_2, F; armatura electromagnetului se deplaseaza în sensul micsorarii rezistentei potentiometrului P_2, înseriata cu înfasurarea de excitatie. Curentul i_e creste si determina cresterea t.e.m E si astfel U_G tinde la valoarea dorita.

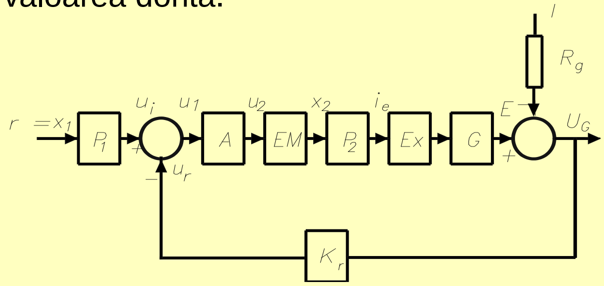


Fig. 1.62

În fig. 1.62 se prezinta schema bloc a sistemului din fig. 1.61 unde

$$k_r = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (1.207)$$

1.5.5.2. Clasificarea sistemelor dinamice dupa adaptabilitate

Doua grupe de sisteme

a) sisteme conventionale;

b) sisteme adaptive.

Sistemele conventionale contin procese invariante ale caror modele matematice nu sunt influentate de perturbatiile care inteevin in functionarea acestora.

Exista procese ale caror modele matematice (caracteristici de transfer) se modifica, de obicei nepredictibil, sub actiunea unor **perturbatii, denumite parametrice.**

Pentru automatizarea acestor procese se utilizeaza dispozitive automate care realizeaza identificarea automata a parametrilor si si în conformitate cu tranzitiile cauzale intrare-iesire dorite, genereaza comenzile corespunzatoare desfasurarii proceselor, cu satisfacerea criteriilor de performante impuse. Asemenea sisteme automate se numesc ***sisteme adaptive***

În fig. 1.63 se prezinta structura generala a unui sistem adaptiv in care : S_1 - subsistemul de baza (principal), S_2 - subsistemul de adaptare, constituit din: a) elementul de identificare - elaboreaza variabila de identificare β functie de parametrii procesului .

b) **blocul de calcul** care elaboreaza **variabila de adaptare** α în conformitate cu **criteriul de adaptare** η_1

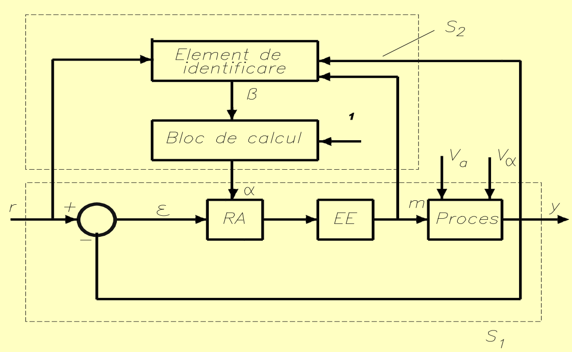


Fig.1.63

SISTEME DINAMICE LINIARE MONOVARIABILE CONSTANTE CU PARAMETRI CONCENTRAŢI

- **2.1. Descrierea intrare-ieşire a sistemelor dinamice liniare monovariabile**
- Pentru descrierea intrare-ieşire un sistem dinamic, este considerat ca o **cutie neagră - „black box”** - se determină relaţia dintre mărimile prin care sistemul interacţionează cu mediul înconjurător: **mărimile de intrare care sunt cauze** şi acţionează asupra sistemului pentru a-l conduce către un scop specificat şi **mărimile de ieşire** care **sunt efecte** şi permit observarea sistemului.
- Sistemele dinamice pot funcţiona în **regimuri staţionare** sau în **regimuri tranzitorii sau dinamice.**

Funcţionarea sistemelor este caracterizată prin modele matematice care exprima proprietatile fizice ale acestora.

Modelele matematice de tip intrare-ieşire evidenţiază numai dependenţa dintre mărimile de ieşire *y(t)* şi mărimile de intrare *u(t)* ale sistemelor, sunt:

- ecuaţiile diferenţiale, ecuaţiile cu diferenţe, funcţiile de transfer

Acest mod de tratare a sistemelor dinamice, este denumit şi ***descriere externă.***

Modelele matematice de tip **intrare-stare-ieşire** evidenţiază şi **comportarea internă a sistemelor** prin intermediul **variabilelor de stare - descriere interna.**

Unui model intrare-ieşire i se pot asocia mai multe modele de tip intrare-stare-ieşire.

Un sistem dinamic liniar monovariabil invariant în timp descris de ecuaţiile de stare:

$$\dot{x} = f\,(x(t), u(t)) \quad t \in R\,,\ \mathrm{x} \in \mathrm{X} \subset R^{\mathrm{n}}\,.$$
$$\mathrm{y(t) = g\,(x\,(t))} \qquad (2.1)$$

În regim staţionar mărimile de intrare, de stare şi de ieşire sunt constante

$$x(t) = x_s = constant \;\; ; \;\; \dot{x}(t) = 0\,;$$
$$u(t) = u_s = constant \;\; ; \;\; y(t) = y_s = constant\,.$$

$$f\,(\,x_s\,,u_s\,) = 0$$
$$y_s = g\,(\,x_s\,)\,.$$

Dependenţa dintre mărimea de iesire y_s şi mărimea de intrare u_s în regimuri staţionare este numita **caracteristică statică a sistemului** $y(s) = \mu(u_s)\,.$

Dacă $\mu(.)$ este o funcţie liniară, atunci caracteristica statică (2.4) este liniară , fig. 2.1

$$y_s = k \cdot u_s$$ unde k este o constantă reală

Caracteristica statică corespunde unui model staţionar intrare-ieşire .

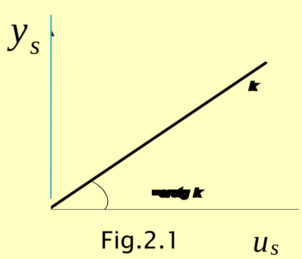


Fig.2.1

Pentru caracterizarea funcţionării sistemului în regim dinamic (regim tranzitoriu), se utilizează un **model general c**are include elementele acumulatoare de energie şi disipatoare de energie

Caracteristica dinamică asociată regimului tranzitoriu se defineşte prin **variaţia mărimii de ieşire în timp**, pentru o formă cunoscută de variaţie în timp a mărimii de intrare

2.2. Modele matematice liniare de tipul intrare-ieşire

- **2.2.1 Sisteme dinamice continue în timp (netede)**
- **2.2.1.1. Ecuaţii diferenţiale ale sistemelor dinamice netede**
- Pentru **deducerea unui model** cât mai exact al unui **sistem** dat **este necesar** să se definească mai întâi **scopul întocmirii modelului**, să se delimiteze **legăturile cu mediul înconjurător**, să se evidenţieze **variabilele de interes** pentru structura considerată.
- **Elaborarea** unui model cuprinde **următoarele etape**:
- a) se descompune sistemul în elemente componente;
- b) pentru fiecare element component, pe baza legilor fizicii, mecanicii, se alege un model idealizat -

- exprimat printr-o relaţie matematică ce leagă mărimea de intrare şi de ieşire;

c) se determină **legăturile între elementele componente** ale sistemului şi **se stabilesc expresiile matematice ale acestora;**
d) se selectează **mărimile de ieşire** ale căror evoluţie se studiază **în funcţie de mărimile de intrare**; se stabileşte **modelul întregului sistem** prezentat prin relaţii algebrice, ecuaţii diferenţiale, expresii integrale liniare sau neliniare, cu coeficienţi constanţi sau variabili în timp

În cazul unui **sistem liniar monovariabil neted** (continuu în timp), cu o intrare şi o ieşire, **modelul matematic intrare-ieşire** este o **ecuaţie diferenţială** cu **coeficienţi constanţi**

Modelul intrare-stare-ieşire este descris de **ecuaţii vectorial-matriciale** de forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \qquad (2.7)$$

unde ***x*** este **vectorul de stare** de dimensiune ***n***; *u, y* sunt mărimi scalare; ***u* - mărime de intrare**, ***y* - mărime de ieşire**; ***A*** - este o **matrice constantă** de dimensiune *n x n*; ***b, c* sunt vectori constanţi** de dimensiune *n*; *d* este o constantă scalară.

Tranziţia intare-ieşire a sistemului (2.7) este descrisă de o ecuaţie diferenţială de ordinul *n*, cu coeficienţi constanţi:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \qquad (2.8)$$

unde $y^{(k)}(t), k = 1,n$ $u^{(j)}(t)$, $j = 1,m$ reprezinta respectiv derivata de ordinul *k* a mărimii *y* şi derivata de ordinul *j* a mărimii *u*.

Se introduce operatorul de derivare *p = d(.)/dt si prima ecuatie (2.7) devine*

$$(pI - A)x(t) = bu(t) \qquad (2.9)$$

unde *I* este matricea unitate de ordin *n*.

$$P(p) = det(pI - A) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0 . \qquad (2.10)$$

P(p) este un polinom de ordin *n, determinantul matricei (pI-A).*

Din (2.9) şi (2.7) rezultă

$$x(t) = (pI - A)^{-1} b\, u(t)$$
$$y(t) = [\, c^T (pI - A)^{-1} b + d \,]\, u(t) .$$

Se introduc notaţiile:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj(pI - A)}{P(p)}; Q_1(p) = adj\,(pI - A) = (\,q_{ij}(p)\,)_{i,j}$$

$$Q(p) = c^T Q_1(p) b + dP(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0$$

$$m \le n.$$

Din a doua relaţie (2.11) se poate explicita

$$y(t) = \left[\, c^T \frac{adj(pI - A)}{P(p)} b + d \,\right] u(t) = \left[\, c^T \frac{Q_1(p)}{P(p)} b + d \,\right] u(t) = \frac{Q(p)}{P(p)} u(t). \quad (2.12)$$

Elementele $q_{ij}(p)$ sunt polinoame de grad cel mult (n-1). Polinomul Q(p) poate avea cel mult gradul n, acelaşi cu al polinomului P(p). Relatia (2.12) se poate scrie asltfe

$$y(t) = \frac{Q(p)}{P(p)} u(t) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} u(t).$$

(2.14)

Din ecuaţia (2.14) se obţine imediat ecuaţia diferenţială (2.8).

Polinomul *P(p)* constituie **polinomul caracteristic** al ecuaţiei diferenţiale (2.8).

Exemplul 2.1. Se consideră un motor de curent continuu cu excitaţie separată, fig.2.2

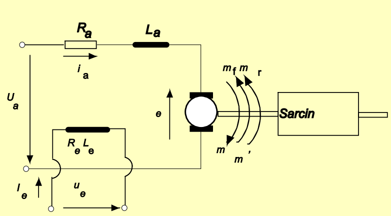


Fig. 2.2

Functionarea motorului este descrisă de:

a) ecuaţia de echilibru a tensiunilor din circuitul indusului, obţinută prin aplicarea teoremei a 2-a a lui Kirchhoff;

b) ecuaţia de echilibru mecanic al cuplurilor care intervin în funcţionarea acestuia

$$u_a - e = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \;\; ; \; e = k_1 \omega$$

$$m_m = k_2 i_a = J \frac{d\omega}{dt} + m_r + m_f \;\; ; \; m_f = k_3 \omega . \qquad (2.15)$$

unde u_a este **tensiunea de alimentare a indusului** (rotorului) motorului şi reprezintă **mărimea de comandă** a acestui sistem; i_a **- curentul** din circuitul **indusului**; R_a , L_a - rezistenţa şi respectiv inductanţa indusului; e **- tensiunea contraelectromotoare**; k_1, k_2, k_3 - constante de proporţionalitate; m_m **- cuplul electromagnetic** dezvoltat de motor; m_r **- cuplul rezistent** util produs de sarcină (maşina de lucru acţionată de motor), care reprezintă mărimea perturbatoare pentru sistem; m_f **- cuplul de frecare vâscoasă**; ω **- viteza unghiulară** care reprezintă **mărimea de ieşire** a sistemului; J**- momentul de inerţie** al maselor în mişcare de rotaţie.

Se aleg ca **variabile de stare**, **curentul** i_a şi **viteza unghiulară** ω : $x_1 = i_a$; $x_2 = \omega$; **mărimea de ieşire** este $y = \omega = x_2$.

Ţinând seama de relaţiile (2.15) ecuaţiile vectorial-matriciale intrare-stare-ieşire ale sistemului sunt

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_1}{L_a} \\ \frac{k_2}{J} & -\frac{k_3}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} m_r \qquad (2.16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix}$$

In care intervin matricea de evoluţie A şi vectorii b şi c^T

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_1}{L_a} \\ \frac{k_2}{J} & -\frac{k_3}{J} \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} ; c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

Se calculeaza matricea *(pI - A)* , *adj(pI-A), P(p), Q(p)*

$$pI - A = \begin{bmatrix} p + \frac{R_a}{L_a} & \frac{k_1}{L_a} \\ -\frac{k_2}{J} & p + \frac{k_3}{J} \end{bmatrix}.$$

$$P(p) = \det(pI - A) = p^2 + p\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{k_3}{J}\right) + \frac{R_a k_3 + k_1 k_2}{L_a J}$$

$$adj(pI - A) = Q_1(p) = \begin{bmatrix} p + \frac{k_3}{J} & -\frac{k_1}{L_a} \\ \frac{k_2}{J} & p + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}$$

$$Q(p) = c^T Q_1(p) b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p + \frac{k_3}{J} & -\frac{k_1}{L_a} \\ \frac{k_2}{J} & p + \frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k_2}{JL_a}$$

Ţinând cont că mărimea de intrare este $u = u_a$ şi mărimea de ieşire este $y = \omega$, pentru motorul de curent continuu ecuaţia operaţională (2.14) devine

$$y(t) = \omega(t) = \frac{Q(p)}{P(p)} u(t) = \frac{\frac{k_2}{JL_a}}{p^2 + p\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{k_3}{J}\right) + \frac{R_a k_3 + k_1 k_2}{L_a J}} u_a(t). \qquad (2.21)$$

$$\omega^{(2)}(t) + \left[\frac{R_a}{L_a} + \frac{k_3}{J}\right] \omega^{(1)}(t) + \frac{R_a k_3 + k_1 k_2}{L_a J} \omega = \frac{k_2}{L_a J} u_a. \qquad (2.22)$$

Exemplul 2.2. Se consideră un model simplificat al **sistemului de suspensie al roţii unui automobil**, fig. 2.3, unde: $m = 1/4$ din masa automobilului, k_r - constanta de elasticitate a resortului amortizor; k_a - coeficientul de amortizare al amortizorului de şoc; **x – variaţia nivelului şoselei, constituind mărimea u de intrare a sistemului; y – deplasarea corpului automobilului constituind mărimea de ieşire a sistemului**.

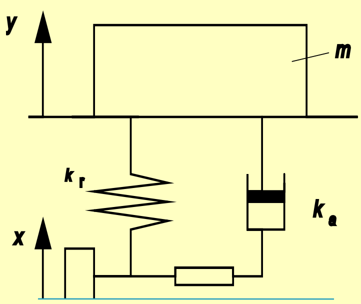


Fig. 2.3

Aplicând legea a 2-a a dinamicii, se obţine ecuaţia diferenţială

$$my^{(2)}(t)+k_a\,[\,y^{(1)}(t)-x^{(1)}(t)\,]+k_r\,[y(t)-x(t)]=0\,. \tag{2.23}$$

Ecuaţia (2.23) se mai poate scrie în forma

$$y^{(2)}(t)+\frac{k_a}{m}y^{(1)}(t)+\frac{k_r}{m}y(t)=\frac{k_a}{m}x^{(1)}(t)+\frac{k_r}{m}x(t)\,. \tag{2.24}$$

În ecuaţia (2.24) în al doilea membru al ecuaţiei diferenţiale a sistemului apare si derivata semnalului de comandă (de intrare) intervine.

2.2.1.2. Aplicarea transformatei Laplace în studiul sistemelor dinamice netede

- **Transformata Laplace** constituie una din **metodele de calcul operaţional** utilizată pentru rezolvarea ecuaţiilor integro-diferenţiale.
- Funcţiile pentru care se poate defini transfor-mata Laplace se numesc ***funcţii original***. O funcţie original este o funcţie de timp *f(t)* care **satisface condiţiile**:
- a) $f(t) = 0$ pentru $t < 0$;
- **b) pe fiecare interval finit** al axei reale, *f(t)* are cel mult un **număr finit de discontinuităţi** de speţa întâia ;
- c) există două numere reale M şi σ_0 astfel că
- $$|\,f(t)|\leq M\,e^{\sigma_0 t} \quad pentru\ \ t\geq 0 \tag{2.36}$$
- Transformata Laplace a unei funcţii original se defineşte prin relaţia

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad (2.37)$$

şi este o funcţie de variabilă complexă *s* = *σ* + *jω* .

Funcţia *F(s)* se numeşte ***imaginea* lui *f(t)*** şi se notează

$$f_{t \in \overline{R}} \xrightarrow{L} F_{s \in C} ; F = \mathrm{L}\{ f(t) \} \quad sau \quad f(t) \rightarrow F(s). \qquad (2.38)$$

Deoarece integrala se aplică **pe semiaxa *(0 , + ∞)*** transformata Laplace definită de (2.37) este **unilaterală.**

Se poate defini şi **transformata Laplace bilaterală** pe toată **axa reală, de la - ∞ la + ∞**. **Integrala** din (2.37) este **convergentă** numai pentru *Real s > σ_0. În acest domeniu F(s)* este olomorfă.

Transformata *F(s)* definită de (2.37) este univocă şi se numeşte *transformata Laplace directă.*. **Transformata Laplace inversă** este **univocă numai în cazul funcţiilor *f(t)* continue** şi se defineşte prin relaţia (2.39) si se noteaza

$$f(t) = L^{-1}\{ F(s) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \qquad (2.39)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad sau \quad F(s) \rightarrow f(t).$$

Transformata Laplace inversă permite **determinarea funcţiei original *f(t)***, când se **cunoaşte funcţia imagine *F(s)***

Utilizarea transformatei Laplace în studiul sistemelor dinamice prezintă **următoarele avantaje:**

a) Transformata Laplace **transformă operaţiile de derivare şi de integrare din domeniul timpului** în **operaţii algebrice (înmulţire şi împărţire cu *s*)**.