

2.2.1.4. Conexiuni de baza ale elementelor rationale

- ▶ Utilizarea **notiunii de functie de transfer** permite **determinarea** simpla a **proprietatilor dinamice** ale unui **sistem** (constituit dintr-un ansamblu de elemente interconectate), atunci **când se cunosc proprietatile dinamice** (functiile de transfer) ale **elementelor componente**

Sunt **trei conexiuni de baza** ale elementelor componente: **conexiunea „serie”**, **conexiunea „paralel”** si **conexiunea „reactie inversa”**.

a) Conexiunea „serie”

Un numar de **n elemente rationale** cu functiile de transfer $H_1(s), H_2(s), \dots, H_n(s)$ sunt **conectate în serie** daca marimea de iesire a elementului k este marime de intrare pentru elementul $k+1$ ca în fig. 2.12.a:

$$U_{k+1}(s) = Y_k(s); k = \overline{1, n-1}; U(s) = U_1(s); Y(s) = Y_n(s) \quad (2.90)$$

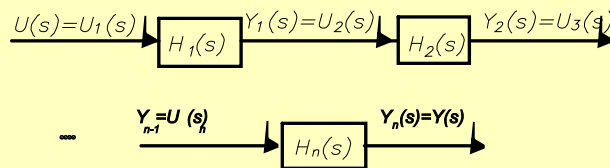
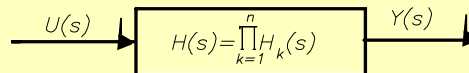


Fig. 2.12



Pentru fiecare element se poate scrie

$$Y_k(s) = H_k(s)U_k(s) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.91)$$

Funcția de transfer a elementului echivalent cu intrarea $U(s)$ și ieșirea $Y(s)$ se determină simplu, ținând seama de (2.90) și (2.91):

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_n(s) = H_n(s)U_n(s) = H_n(s)Y_{n-1}(s) = H_n(s)H_{n-1}(s)U_{n-1}(s) = \\ &= H_n(s)H_{n-1}(s)\dots H_1(s)U_1(s) = \left(\prod_{k=1}^n H_k(s) \right) U(s) = H(s)U(s). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Din (2.92) rezulta
$$H(s) = \prod_{k=1}^n H_k(s). \quad (2.93)$$

Deci **funcția de transfer echivalentă** pentru mai multe **elemente racionale conectate în serie** este egală cu **produsul funcțiilor de transfer ale acestor elemente**. Elementul echivalent este reprezentat în fig. 2.12.b.

b) Conexiunea „paralel”

- ▶ Elementele racionale cu funcțiile de transfer $H_1(s)$, $H_2(s)$, ..., $H_n(s)$ sunt **conectate în paralel** dacă au **aceeași mărime de intrare** iar **ieșirile se însumează** (algebric):

$$U_1(s) = U_2(s) = \dots = U_n(s) = U(s) \quad (2.94)$$

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s) \quad (2.95)$$

O astfel de structură este reprezentată în fig. 2.13.a, unde la elementul sumator este precizat semnul cu care fiecare ieșire apare în suma (2.95).

Deoarece pentru fiecare element se poate scrie $Y_k(s) = H_k(s)U_k(s) = H_k(s)U(s)$, $k = 1, n$, din (2.95) rezulta

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n H_k(s)U(s) \quad (2.96)$$

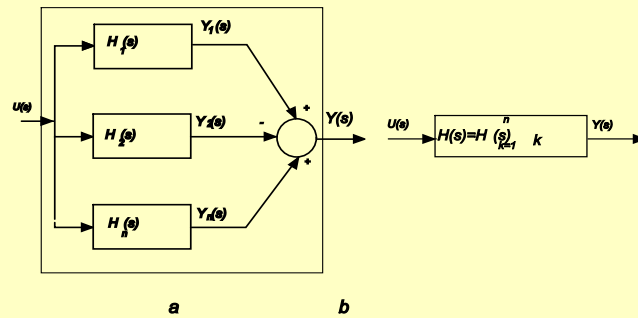


Fig. 2.13

Deci funcția de transfer a sistemului echivalent, prezentat în fig. 2.13.b, are expresia

$$H(s) = \sum_{k=1}^n H_k(s) \quad (2.96)$$

Asadar **funcția de transfer echivalentă** pentru mai multe **elemente conectate în „paralel”** este egala cu **suma funcțiilor de transfer** ale acestor elemente .

c) Conexiunea „reactie inversa”

- ▶ **Conexiunea cu reacție inversă** a doua elemente cu funcțiile de transfer $H_1(s)$ și $H_2(s)$ este prezentată în fig. 2.14 , unde **elementul cu funcția de transfer $H_2(s)$ este conectat pe calea de reacție** a elementului cu funcția de transfer $H_1(s)$.

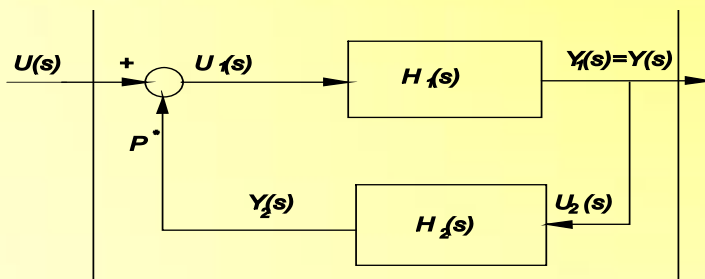


Fig. 2.14

În conformitate cu aceasta schema se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned}U_1(s) &= U(s) + Y_2(s) \\U_2(s) &= Y_1(s) \\Y(s) &= Y_1(s)\end{aligned}\quad (2.98)$$

Dacă în prima relație (2.98), **apare semnul '+'** se spune că **reactia este pozitivă** iar dacă **apare semnul '-'**, se spune că **reactia este negativă**. Din (2.98) și relațiile de definiție ale funcțiilor de transfer $H_1(s)$ și $H_2(s)$ rezultă

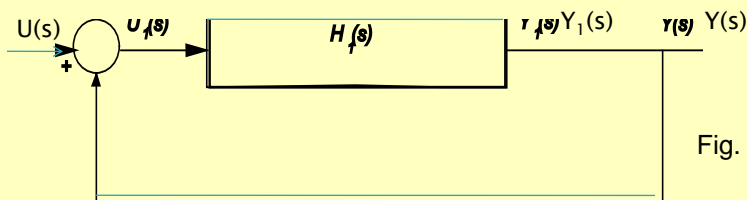
$$Y(s) = Y_1(s) = H_1(s)U_1(s) = H_1(s)U(s) \pm H_1(s)H_2(s)Y(s) \quad (2.99)$$

de unde
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)} \quad (2.100)$$

Dacă reacția este adusă direct de la ieșirea unui element, se spune că **reactia este unitară**, fig. 2.15.

În acest caz funcția de transfer echivalentă se găsește considerând în (2.98) $U_2(s) = Y_2(s)$, adică **$H_2(s) = 1$** în relația (2.99)

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)} \quad (2.100)$$



Deci **funcția de transfer $H(s)$ echivalentă conexiunii cu reacție inversă** este egală cu **raportul dintre funcția de transfer a căii directe $H_1(s)$ și suma sau diferența** (pentru reacție inversă negativă, respectiv pozitivă) dintre **unitate și funcția de transfer a buclei** (calea directă și calea de reacție), considerată deschisă în punctul P , fig. 2.14, $H_1(s)H_2(s)$.

2.2.1.5. Exemple de stabilire a functiei de transfer si ale schemelor bloc

- ▶ *Motorul de curent continuu.* Pentru motorul de curent continuu cu excitatie separata prezentat în fig. 2.2 a functionarea este descrisa de ecuatiile (2.15). Se presupune ca motorul pleaca din repaus (conditiile initiale sunt nule) si aplicând transformata Laplace în (2.15) se obtine

$$U_a(s) = (R_a + sL_a)I_a(s) + E(s); E(s) = k_1\Omega(s)$$

$$Js\Omega(s) = M_m(s) - M_f(s) - M_r(s) \quad (2.105)$$

$$M_m(s) = k_2 I_a(s); M_f(s) = k_3 \Omega(s)$$

Aceste ecuatii se pot aduce la forma (2.106), care se reprezinta prin schema bloc din fig. 2.17

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - E(s)}{R_a + sL_a}; E(s) = k_1\Omega(s)$$

$$M_m(s) = k_2 I_a(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{Js} [M_m(s) - M_f(s) - M_r(s)]$$

$$M_f(s) = k_3 \Omega(s)$$

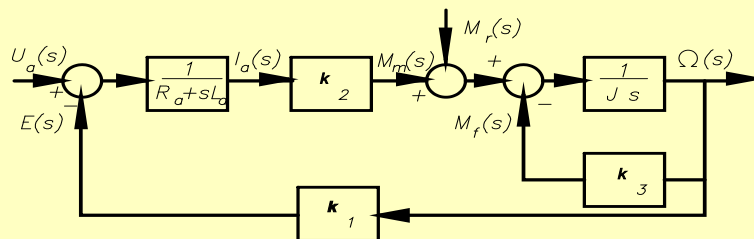


Fig. 2.17

2.2.1.6. Transformari structurale echivalente si simplificarea schemelor bloc

- ▶ **Schemele bloc structurale** ale sistemelor dinamice prezinta un **avantaj pentru ca permit trecerea de la ecuatiile** scrise pentru **partile cele mai simple** ale sistemelor la **descrierea matematica a sistemelor în ansamblu** .
- ▶ Pentru transformarea schemelor bloc nu se pot formula reguli exacte ci se pot enunta urmatoarele **reguli generale** :
- ▶ 1) Se reduc la **blocuri echivalente blocurile conectate în serie** fara derivatii intermediare;
- ▶ 2) Se reduc la **blocuri echivalente blocurile conectate în paralel**, fara derivatii la iesirile blocurilor

- 3) Se **deplaseaza convenabil derivatiile si sumatoarele** în conformitate **cu identitatile de transformare** ce se vor prezenta ;
- 4) Se reduc la **blocuri echivalente circuitele închise (cu reactie inversa)** începând cu cele interioare ;
- 5) Se repeta si/sau se **combina operatiile de la punctele 1 - 4** în functie de natura schemei si de scopul urmarit.

Identitati de transformare ale schemelor bloc.

1. Deplasarea sumatorului de la iesire la intrare

Sumatorul de la iesirea blocului $H(s)$ din fig. 2.19.a este translat la intrarea sa , fig.2.19.b.

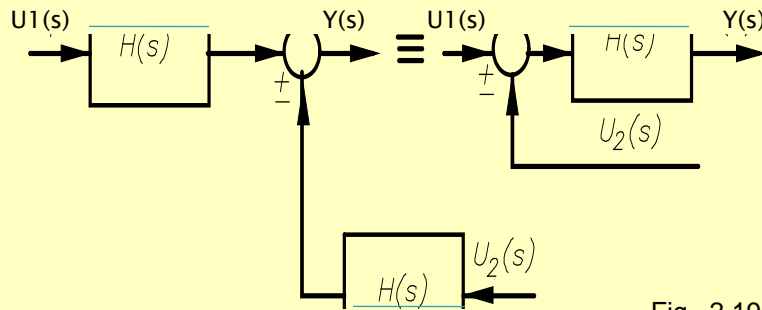


Fig. 2.19

$$Y(s) = H(s)U_1(s) \pm H(s)U_2(s) \quad | \quad Y(s) = H(s)[U_1(s) \pm U_2(s)]$$

2. Translarea unui bloc dupa sumator

Blocul cu **functia de transfer $H_2(s)$** din fig. 2.20.a este translat **dupa sumator**, fig. 2.20.b. Pe cealalta intrare în sumator **se înseriază** un bloc **cu functia de transfer $1/H_2(s)$** .

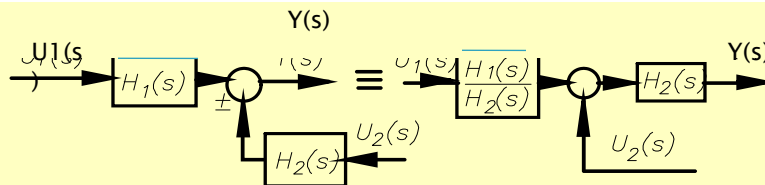


Fig. 2.20

$$Y(s) = H_1(s)U_1(s) \pm H_2(s)U_2(s) \quad \left| \quad Y(s) = \left[\frac{H_1(s)}{H_2(s)} U_1(s) \pm U_2(s) \right] H_2(s) \right.$$

$$\left. Y(s) = H_1(s)U_1(s) \pm H_2(s)U_2(s) \right.$$

3. Translarea punctului de ramificatie de la iesirea unui bloc

Ramificatia de la iesirea blocului $H(s)$ din fig. 2.21.a este translata la intrarea sa, fig. 2.21.b. **Pe fiecare ramura apare** cîte un **bloc cu functia de transfer $H(s)$** .

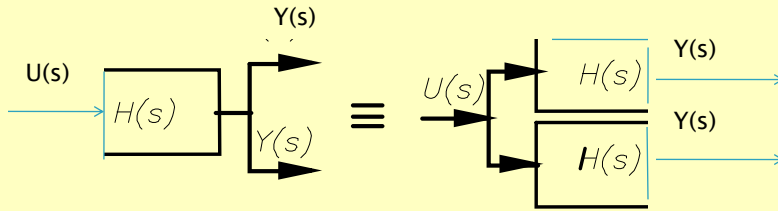


Fig. 2.21

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad / \quad Y(s) = H(s)U(s)$$

4. Translarea punctului de ramificare de la intrare la iesirea unui bloc

Punctul de ramificare de la **intrarea blocului $H(s)$** , fig. 2.22.a, este translat la iesirea sa, fig. 2.22.b. Pe ramificare apare un bloc cu functia de transfer **$1/H(s)$** .

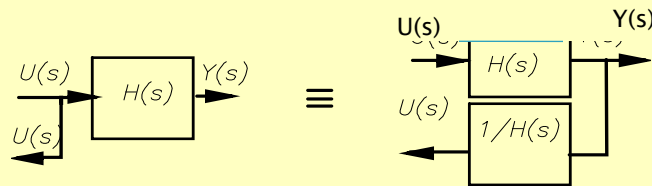


Fig. 2.22

$$U(s) = U(s) \quad / \quad U(s) = \frac{Y(s)}{H(s)}$$

5. Translarea sumatoarelor.

Sumatoarele 1 si 2 din fig. 2.23.a schimba locurile între ele, fig. 2.23.b.

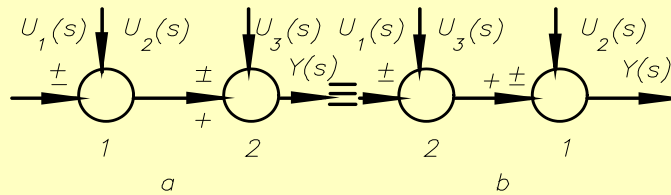


Fig. 2.23

$$Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm U_3(s) \quad / \quad Y(s) = U_1(s) \pm U_3(s) \pm U_2(s)$$

6. Deplasarea unui sumator în afara buclei de reacție

Fie sistemul cu reacție din fig. 2.24.a care conține pe **legătura directă un sumator 2**. Prin deplasarea sumatorului 2 în afara buclei de reacție se obține schema echivalentă din fig.2.24.b. **Pe intrarea u_2 se introduce un bloc cu funcția de transfer $1/[1 \pm H_1(s)H_2(s)]$.**

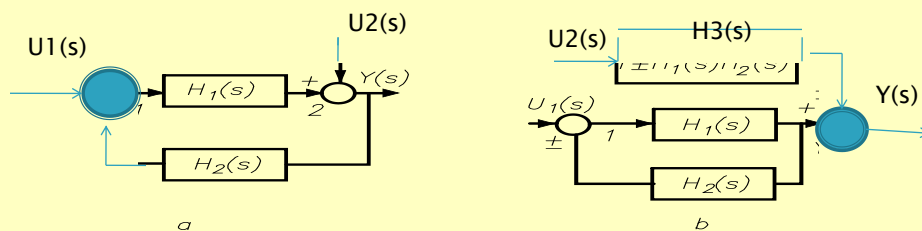


Fig. 2.24

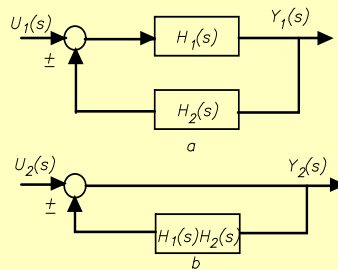
Se aplica principiul suprapunerii efectelor. Pentru $U_2(s) = 0$ schema din fig. 2.24.a se reduce la schema din fig. 2.25.a, iar pentru $U_1(s) = 0$ aceeași schema se reduce la schema din fig. 2.25.b.

Ecuatiile transferului intrare-iesire pentru schemele din fig.2.25 sunt

$$Y_1(s) = \frac{H_1(s)U_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}; Y_2(s) = \pm \frac{U_2(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$

Rezulta ca ecuatia de transfer intrare-iesire a schemei din fig.2.24.a este

$$Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) = \frac{H_1(s)U_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)} \pm \frac{U_2(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$



Aceeasi ecuatie corespunde si schemei din fig. 2.24.b.

Fig. 2.25

Exemplul 2.5. Se considera **schema bloc a motorului de curent continuu** din fig. 2.17. Înlocuind cele doua blocuri conectate în serie si conexiunea cu reactie inversa locala cu blocuri echivalente, schema bloc se simplifica ca în fig. 2.26. Viteza $\Omega(s)$ va avea doua componente, , una determinata de tensiunea $U_a(s)$, notata cu $\Omega_{ua}(s)$ si una determinata de cuplul rezistent $M_r(s)$, notata $\Omega_{mr}(s)$. Se introduc notatiile

$$H_1(s) = \frac{k_2}{R_a + sL_a}; H_2(s) = \frac{1}{Js + k_3} \quad (2.109)$$

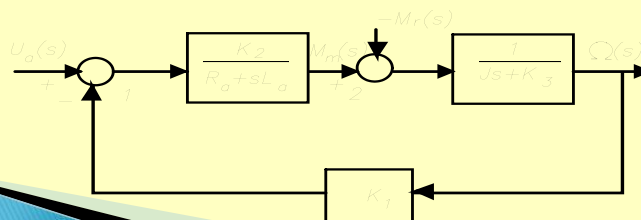
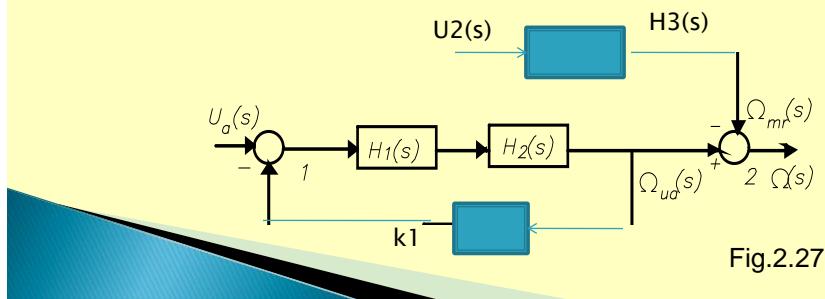


Fig. 2.26

$H_1(s)$, $H_2(s)$ sunt functiile de transfer ale blocurilor de pe legatura directa din schema bloc din fig. 2.26. Se deplaseaza sumatorul 2 de la intrarea blocului $H_2(s)$ la iesirea lui si apoi în afara buclei si schema bloc din fig. 2.26 este adusa la forma din fig. 2.27, unde functia de transfer $H_3(s)$ este data de relatia :

$$H_3(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)k_1} \quad (2.110)$$



Viteza $\Omega(s)$ va avea expresia

$$\Omega(s) = \Omega_{ua}(s) - \Omega_{mr}(s) = H_{ua}(s)U_a(s) - H_{mr}(s)M_r(s). \quad (2.111)$$

Funcțiile de transfer $H_{ua}(s)$, $H_{mr}(s)$ sunt date de relațiile

$$H_{ua}(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)k_1} = \frac{k_2}{L_a J s^2 + (J R_a + L_a k_3)s + k_1 k_2 + k_3 R_a} \quad (2.112)$$

$$H_{mr}(s) = H_3(s) = \frac{L_a s + R_a}{L_a J s^2 + (J R_a + L_a k_3)s + k_1 k_2 + k_3 R_a}. \quad (2.113)$$

Pentru ecuația (2.111) corespunde schema bloc din fig. 2.28 .

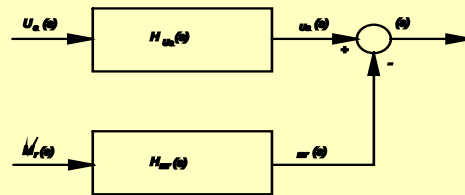


Fig. 2.28

2.2.2. Sisteme dinamice discrete în timp.

Ecuatii cu diferente. Functii de transfer în z

- ▶ **2.2.2.1. Ecuatii cu diferente ale sistemelor dinamice discrete**
- ▶ **Ecuatiile cu diferente** (sau ecuatii recurente) **descriu matematic sistemele discrete** (numerice si cu esantionare). O ecuatie cu diferente are o forma analoaga cu o ecuatie diferentiala, numai ca **în locul derivatelor succesive ale intrarii si iesirii**, apar **valorile acelorasi functii la valori discrete ale timpului** (la sistemele cu esantionare aceste valori sunt echidistante).
- ▶ Fie o ecuatie diferentiala ordinara de forma

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t). \quad (2.114)$$

Se aproximeaza derivatele succesive ale marimilor $u(t)$ si $y(t)$ prin rapoartele incrementale succesive

$$\begin{aligned}
 y^{(1)}(t) &\cong \frac{y(t) - y(t-T)}{T} \\
 y^{(2)}(t) &\cong \frac{y^{(1)}(t) - y^{(1)}(t-T)}{T} = \frac{1}{2} [y(t) - 2y(t-T) + y(t-2T)] = \\
 &= \frac{1}{T^2} [C_2^0 y(t) - C_2^1 y(t-T) + (-1)^2 C_2^2 y(t-2T)] \\
 y^{(k)}(t) &\cong \frac{1}{T^k} [C_k^0 y(t) - C_k^1 y(t-T) + \dots + (-1)^k C_k^k y(t-kT)] \\
 u^{(1)} &\cong \frac{1}{T} [u(t) - u(t-T)] \\
 u^{(2)}(t) &\cong \frac{1}{T^2} [C_2^0 u(t) - C_2^1 u(t-T) + (-1)^2 C_2^2 u(t-2T)] \\
 u^{(j)}(t) &\cong \frac{1}{T^j} [C_j^0 u(t) - C_j^1 u(t-T) + \dots + (-1)^j C_j^j u(t-jT)]
 \end{aligned} \quad (2.115)$$