$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t). \qquad (2.114)$$

Se aproximeaza derivatele succesive ale marimilor *u(t)* si *y(t)* prin rapoartele incrementale succesive

$$y^{(1)}(t) \cong \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

$$y^{(2)}(t) \cong \frac{y^{(1)}(t) - y^{(1)}(t-T)}{T} = \frac{1}{T^2}\left[y(t) - 2y(t-T) + y(t-2T)\right] =$$

$$= \frac{1}{T^2}\left[C_2^0 y(t) - C_2^1 y(t-T) + (-1)^2 C_2^2 y(t-2T)\right]$$

$$y^{(k)}(t) \cong \frac{1}{T^k}\left[C_k^0 y(t) - C_k^1 y(t-T) + \ldots + (-1)^k C_k^k y(t-kT)\right] \qquad (2.115)$$

$$u^{(1)} \cong \frac{1}{T}\left[u(t) - u(t-T)\right]$$

$$u^{(2)}(t) \cong \frac{1}{T^2}\left[C_2^0 u(t) - C_2^1 u(t-T) + (-1)^2 C_2^2 u(t-2T)\right]$$

$$u^{(j)}(t) \cong \frac{1}{T^j}\left[C_j^0 u(t) - C_j^1 u(t-T) + \ldots + (-1)^j C_j^j u(t-jT)\right]$$

unde C_p^q = „combinari de *p*, luate câte *q*”.
Se înlocuiesc în (2.114) derivatele marimilor *u(t)* si *y(t)* cu rapoartele din (2.115). Se va obtine

$$\frac{a_n}{T^n}\left[C_n^0 y(t) + \ldots + (-1)^n C_n^n y(t-nT)\right] + \frac{a_{n-1}}{T^{n-1}}\left[C_{n-1}^0 y(t) + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} y(t-(n-1)T)\right] + \ldots + \frac{a_1}{T}\left[y(t) - y(t-T)\right] + a_0 y(t) = \qquad (2.116)$$

$$= \frac{b_m}{T^m}\left[C_m^0 u(t) + \ldots + (-1)^m C_m^m u(t-mT)\right] + \ldots + \frac{b_1}{T}\left[u(t) - u(t-T)\right] + b_0 u(t).$$

Ordonând dupa ordinul esantioanelor rezulta

$$\frac{a_n}{T^n}(-1)^n C_n^n y(t-nT) + \left[\frac{a_n}{T^n}(-1)^{n-1} C_n^{n-1} + \frac{a_{n-1}}{T^{n-1}}(-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}\right] \bullet$$

$$\bullet\, y(t-(n-1)T) + \ldots + \left[-\frac{a_n}{T^n} C_n^1 - \frac{a_{n-1}}{T^{n-1}} C_{n-1}^1 - \ldots - \frac{a_1}{T}\right] \bullet y(t-T) + \qquad (2.117)$$

$$+ \left[\frac{a_n}{T^n} C_n^0 + \frac{a_{n-1}}{T^{n-1}} C_{n-1}^0 + \ldots + \frac{a_1}{T} + a_0\right] y(t) =$$

$$=\frac{b_m(-1)^m C_m^m}{T^m}u(t-mT)+\left[\frac{b_m(-1)^{m-1}C_m^{m-1}}{T^m}+\frac{b_{m-1}(-1)^{m-1}C_{m-1}^{m-1}}{T^{m-1}}\right]\bullet$$

$$u(t-(m-1)T)+\ldots+\left[-\frac{b_m C_m^1}{T^m}-\frac{b_{m-1}C_{m-1}^1}{T^{m-1}}-\ldots-\frac{b_1}{T}\right]u(t-T)+ \tag{2.117}$$

$$+\left[\frac{b_m C_m^0}{T^m}+\frac{b_{m-1}C_{m-1}^0}{T^{m-1}}+\ldots+\frac{b_1}{T}+b_0\right]u(t).$$

Se introduc notatiile

$$a_{n'}=\frac{a_n}{T^n}(-1)^n C_n^n$$

$$a_{n'-k}=\left[\frac{a_n}{T^n}(-1)^{n-k}C_n^{n-k}+\ldots+\frac{a_{n-k}}{T^{n-k}}(-1)^{n-k}C_{n-k}^{n-k}\right]\frac{1}{a_{n'}}.$$

$$a_{1'}=\left[-\frac{a_n}{T^n}C_n^1-\frac{a_{n-1}}{T^{n-1}}C_{n-1}^1-\ldots-\frac{a_1}{T}\right]\frac{1}{a_{n'}}$$

$$a_{0'}=\left[\frac{a_n}{T^n}C_n^0+\frac{a_{n-1}}{T^{n-1}}C_{n-1}^0+\ldots+\frac{a_1}{T}+a_0\right]\frac{1}{a_{n'}} \tag{2.118}$$

$$b_{m'}=\left[\frac{b_m}{T^m}(-1)^m C_m^m\right]\frac{1}{a_{n'}}$$

$$b_{m'-j}=\left[\frac{b_m}{T^m}(-1)^{m-j}C_m^{m-j}+\frac{b_{m-1}}{T^{m-1}}(-1)^{m-j}C_{m-j}^{m-j}+\ldots+\frac{b_{m-j}}{T^{m-j}}(-1)^{m-j}C_{m-j}^{m-j}\right]\frac{1}{a_{n'}}. \tag{2.118}$$

$$b_{0'}=\left[\frac{b_n}{T^m}C_m^0+\frac{b_{m-1}}{T^{m-1}}C_{m-1}^0+\ldots+\frac{b_1}{T}+b_0\right]\frac{1}{a_{n'}}$$

Cu aceste notatii ecuatia (2.117) devine

$$y(t-nT)+a_{n'-1}y(t-(n-1)T)+\ldots+a_{1'}y(t-T)+a_{0'}y(t)=$$
$$=b_{m'}u(t-mT)+\ldots+b_{1'}u(t-T)+b_{0'}u(t),\ m\le n. \tag{2.119}$$

Ecuatia (2.119) este o ecuatie cu diferente de ordin *n* cu esantioane intarziate, care descrie un sistem liniar monovariabil discret. Coeficientii ecuatiei cu diferente, depind de perioada de esantionare *T* .

Pentru esantioanele în avans ale semnalelor de intrare si de iesire, ecuatia cu diferente care descrie un sistem liniar monovariabil discret devine

$$y(t+nT)+a^1_{n-1}\,y(t+(n-1)T)+\ldots+a^1_1\,y(t+T)+a^1_0\,y(t)=$$
$$=b^1_m\,u(t+mT)+\ldots+b^1_1\,u(t+T)+b^1_0\,u(t) \qquad (2.120)$$

Pentru sistemele esantionate: *t* = *kT, k* $\in$ ***Z***, *t* $\in$ ***R***, si introducând **timpul normat *t/T*, notat** abuziv tot **cu *t***, care **este egal cu *k*** $\in$ ***Z***, ecuatiile recurente (cu *diferente), (2.119) si (2.120), pentru un sistem liniar monovariabil discret, devin*

$$y(k-n)+a_{n-1}\,y(k-(n-1))+\ldots+a_1\,y(k-1)+a_0\,y(k)=$$
$$=b_m u(m-k)+\ldots+b_1 u(k-1)+b_0 u(k) \qquad (2.121)$$

$$y(k+n)\;+\;a_{n-1}\,y(k+(n-1))\;+\ldots+\;a_1\,y(k-1)\;+\;a_0\,y(k)=$$
$$=b_m u\,(k+m)\;+\ldots+\;b_1 u(k+1)\;+\;b_0 u(k). \qquad (2.122)$$

În ecuatiile (2.121) si (2.122), pentru simplificarea scrierii s-a renuntat la indicele superior „'” sau „1” al coeficientilor si s-a considerat $a_n = 1$.

În cele doua ecuatii, **coeficientii nu sunt identici**. Aceste ecuatii reprezinta **formele standard ale modelelor sistemelor dinamice liniare monovariabile discrete**.

Exemplul 2.6. Sa se determine modelul discret pentru un sistem monovariabil continuu, descris de ecuatia diferentiala de ordinul doi

$$y^{(2)}(t)+1{,}6y(t)+y(t)=2u^{(1)}(t)+u(t).$$

Se înlocuiesc în (2.123) derivatele lui *u(t)* si *y(t)*, conform relatiilor (2.115), pentru o perioada de esantionare *T = 0,1*. Se obtine

$$\frac{y(t-2T)-2y(t-T)+y(t)}{T^2}+1{,}6\,\frac{y(t)-y(t-T)}{T}+y(t)=$$
$$=2\,\frac{u(t)-u(t-T)}{T}+u(t)$$

$$\frac{1}{T^2}y(t-2T)+\left[-\frac{2}{T^2}-\frac{1,6}{T}\right]y(t-T)+\left[\frac{1}{T^2}+\frac{1,6}{T}+1\right]y(t)=$$
$$=-\frac{2}{T}u(t-T)+\left[\frac{2}{T}+1\right]u(t)$$
$$y(t-2T)-2,16y(t-T)+1,17y(t)=-0,2u(t-T)+0,21u(t).$$

Se introduce timpul normat *t/T* = *t* = *k*. Pentru semnalele întârziate se obtine ecuatia cu diferente

$$y(k-2)-2,16\,y(k-1)+1,17\,y(k)=-0,2\,u(k-1)+0,21\,u(k).$$

Considerând semnalele în avans se obtine ecuatia cu diferente

$$y(k+2)-1,84\,y(k+1)+0,85\,y(k)=+0,2\,u(k+1)-0,19\,u(k).$$

2.2.2.2. Aplicarea transformatei Z în studiul sistemelor dinamice discrete

- Transformata *Z* permite o tratare a semnalelor sistemelor numerice si a sistemelor cu esantionare similara celei permisa de transformata Laplace pentru semnalele continue în timp.

  Fie o functie [*f(k)*] de variabila întreaga *k* cu valori reale., fig. 2.29. Functia *f* notata [*f(k)*] sau f_k , pentru a evidentia caracterul discret al variabilei, este numita *serie* sau *semnal numeric*.

- Prin esantionarea regulata cu pasul *T* a unui semnal continuu *f(t)* se obtin valorile extrase la momentele *t* = *kT*, *f(kT)*, fig. 2.30. In timp normat *t/T* notat abuziv tot cu *t* (echivalent cu a considera *T* = *1*) se poate scrie *f(kT)* = *f(k)* .

Pentru o functie *f(k)* de variabila întreaga *k* si cu valori reale, prin transformata *Z* corespunde o functie *F(z)* de variabila complexa *z* cu valori complexe

$$f(k) \xrightarrow{Z} F(z); F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}; F(z) = Z\{f(k)\}; k \in N \qquad (2.126)$$

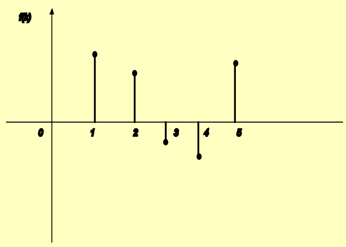

Fig. 2.29

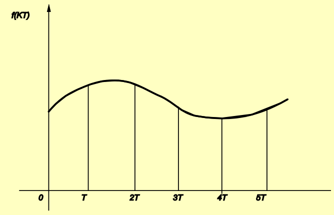

Fig. 2.30

Transformata *F(z)* exista numai daca seria (2.126) este convergenta, deci daca $|z^{-1}|$ **este mic**, respectiv $|z|$ **este mare**.

Facând comparatia cu transformata Laplace care exista pentru *Re s* $\geq \sigma_0$, fig. 2.31.*a*, transformata *Z* , (2.126), exista pentru $|z| > R$, fig. 2.31.*b*; *R* se numeste *raza de convergenta*.

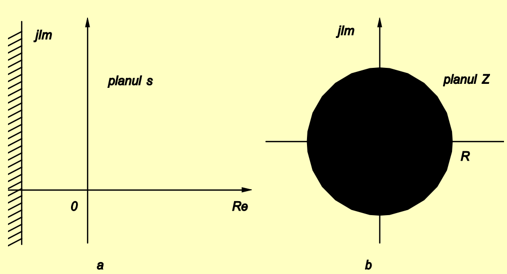

Fig. 2.31

Legatura dintre transformata Laplace si transformata *Z*

Un semnal continuu *f(t)*, fig. 2.32.*a*, este transformat prin operatia de esantionare într-o serie de impulsuri $f^*(t)$, fig. 2.32.*b* :

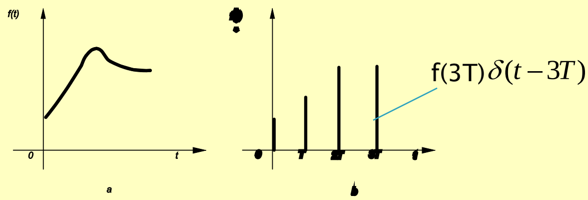

Fig. 2.32

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,\delta(t-k). \qquad (2.127)$$

Aplicând transformata Laplace în (2.127) se obtine

$$F^*(s)=L(\,f^*(t))=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-ks}. \qquad (2.128)$$

Se introduce o noua variabila complexa

$$z=e^{sT}\,;(\ z=e^{s}\ \ pentru\ \ T=1\ ). \qquad (2.129)$$

Relatia (2.128) devine

$$[\ F^*(s)\ ]_{e^{Ts}=z}=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}=F(z). \qquad (2.130)$$

Functia ***F(z)* este transformata** *Z* a **seriei de impulsuri *f*(t)*.** Dar seria de impulsuri *f*(t)* se obtine din semnalul continuu *f(t);* se mai spune, facând abuz de sens si de notatie, ca transformata *Z* a semnalului *f(t)* este

$$Z(f(t))=Z(\,f^*(t))=[L\{\ f^*(t)\}\,]_{e^{Ts}=z}=\sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^{-k}. \qquad (2.131)$$

Exemplul 2.7. a) Fie $f(t)=\sigma(t)$, semnalul treapta unitara;

$f(kT)=f(k)=1$ pentru $k=0, 1, 2, ...$; Transformata *Z* a acestui semnal este

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}=Z\{\sigma(k)\} \qquad (2.132)$$

b) Se considera $f(t) = e^{-t/T1}$; $f(kT) = [e^{-kT/T1}] = (e^{-T/T1})^k = a^k$;

$a = e^{-T/T1} < 1$; Transformata Z este

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots = \frac{z}{z-a} \qquad (2.133)$$

$$\text{pentru } |a/z| < t \,.$$

Proprietatile transformatei Z

1. Liniaritatea $\qquad Z\{c_1 f(k) + c_2 g(k)\} = c_1 Z\{f(k)\} + c_2 Z\{g(k)\}. \qquad$ (2.134)

2.Teorema întârzierii temporale (semnal cauzal)

Fie functiile $f : k \to f(k)$, $f(k) = 0$ pentru $k < 0$ (semnal cauzal) si $g : k \to g(k) = f(k - k_0)$, $g(k) = 0$ pentru $k < k_0$, $(k_0 > 0)$, fig. 2.33

Transformata Z a functiei g(k) este

$$G(z) = Z\{g(k)\} = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) z^{-i} = \sum_{i=k_0}^{\infty} f(i-k_0) z^{-i} = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) z^{-j-k_0} = z^{-k_0} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) z^{-j} = z^{-k_0} F(z) \,.$$

(2.137)

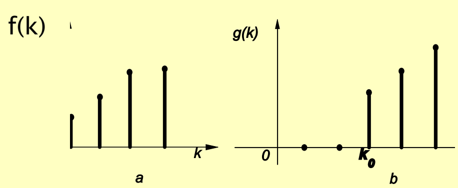

Fig. 2.33

k

Exemplul 2.8. Fie $G(z) = 1/z(z - 1)$. Se poate scrie

$$G(z) = \frac{1}{z(z-1)} = z^{-2} \frac{z}{z-1} = z^{-2} \, Z\{\, \sigma(k) \,\} \,.$$

.3. Transformata Z a produsului de convolutie

Produsul lor de convolutie este definit de

$$(f \bullet g)(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) g(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) g(k-i) \qquad (2.138)$$

Transformata *Z* a produsului de convolutie este egala cu produsul transformatelor Z ale functiilor.

$$Z(f \bullet g) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)\right)z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\sum_{i=0}^{\infty} g(k-i)z^{-k} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}G(z) = G(z)\sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i} = G(z)F(z) \qquad (2.142)$$

4. Decalarea semnalelor necauzale

Un semnal necauzal f(k) este prezentat in fig. 2.34.
Un semnal *f(k)* cu transformata *F(z)*. Se defineste functia $g(k) = f(k_0 + k)$. Se determina transformata *Z* a semnalului *g(k)*

$$G(z) = Z\{g(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+k_0)z^{-k} =$$
$$= \sum_{i=k_0}^{\infty} f(i)z^{-i+k_0} = z^{k_0}\sum_{i=k_0}^{\infty} f(i)z^{-i}. \qquad (2.144)$$

Proprietatile transformatei Z (continuare)

7. Determinarea originalului $Z^{-1}\{F(z)\}$

Se utilizeaza doua metode: a) metoda dezvoltarii în fractii simple; b) metoda împartirii infinite.

Se considera *F(z)* de forma

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{Q(z)}{P(z)} \qquad (2.155)$$

a) Metoda dezvoltarii în fractii simple se aplica descompunând în fractii simple **functia *F(z)/z***

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^{r} F_i(z). \qquad (2.156)$$

Tinând seama de proprietatea de liniaritate a transformatei *Z* din (2.156) se obtine

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_{i=1}^{r} Z^{-1}\{\, zF_i(z)\} \qquad (2.157)$$

Se foloseste descompunerea functiei *F(z)/z* în loc de *F(z)* deoarece transformatele *Z* ale sirurilor uzuale contin pe *z* la numarator.

Exemplul 2.9. Se considera *F(z)* de forma

$$F(z) = \frac{z}{z^3 - 2{,}5z^2 + 2z - 0{,}5} = \frac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2}.$$

Se descompune în fractii simple *F(z)/z si se detrmina f(k)*

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{4}{z-0{,}5} - \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

$$f(k) = 4\,Z^{-1}\left(\frac{z}{z-0{,}5}\right) - 4\,Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) + 2\,Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

$$f(k) = 4(0{,}5)^k - 4 + 2k.$$

b) Metoda împartirii infinite este de fapt o **dezvoltare în serie Taylor a functiei rationale *F(z)*** în jurul **punctului de la infinit**, obtinându-se o **serie de puteri în z^{-1}.** Conform relatiei de definitie a transformatei *Z*, **coeficientul lui z^{-k}** va fi chiar **termenul *k* al sirului** cautat.

In functia rationala *F(z),* din relatia (2.155), se considera *m = n si* se face schimbarea de variabila *z = 1/γ* ; se defineste functia

$$\varphi(\gamma) = F(z)\big|_{z=1/\gamma} = F\left(\frac{1}{\gamma}\right). \qquad (2.158)$$

Se dezvolta *φ(γ)* în serie Taylor în jurul originii. Se obtine

$$\varphi(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \gamma^k \,;\, C_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k\varphi(\gamma)}{d\gamma^k}\Big|_{\gamma=0} \text{ ; si pentru } \gamma = z^{-1} \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}.$$

(2.160)

Din (2.160) rezulta termenii sirului f(k)

$$f(k)=C_k$$

Prin împartirea directa a polinoamelor functiei *F(z)* din (2.155, intre coeficientii C_k si coeficientii polinoamelor functiei rationale *F(z)*, (2.155) se pot stabili relatiile

$$C_0 = b_n = f(0)$$
$$C_1 = b_{n-1} - a_{n-1}C_0 = f(1)$$
$$\vdots$$
$$C_k = b_{n-k} - \sum_{i=1}^{k} a_{n-i}C_{k-i} = f(k)$$

Exemplul 2.10. Pentru functia *F(z)* din exemplul precedent se efectueaza împartirea si se obtine

$$\frac{z}{z^3 - 2,5z^2 + 2z - 0,5} = z^{-2} + 2,5z^{-3} + 4,25z^{-4} + 6,125z^{-5}$$

si deci: *f(0) = 0 ; f(1) = 0 ; f(2) = 1 ; f(3) = 2.5 ; f(4) = 4,25 ; f(5) = 6,125.*

2.2.2.3. Functia de transfer a unui sistem dinamic discret în timp

Functia de transfer a unui sistem discret în timp se numeste ***functie de transfer discreta***, ***functie de transfer în z sau Z - functie de transfer*****.**

Se considera un sistem liniar monovariabil discret descris de ecuatia cu diferente , cu conditii initiale nule

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) = \\ = b_m u(k+m) + \ldots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k). \end{aligned} \qquad (2.163)$$

$$y(0) = y(1) = \ldots = y(n-1) = 0$$
$$u(0) = u(1) = \ldots = u(m-1) = 0.$$

Transformatele *Z* ale marimilor de intrare si de iesire sunt

$$U(z) = Z\{u(k)\};\, Y(z) = Z\{y(k)\}. \qquad (2.164)$$

Aplicând transformata *Z* în ecuatia (2.163) pentru conditiile initiale nule, si tinând seama de proprietatile transformatei *Z* se obtine

$$\begin{aligned}(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0) Y(z) = \\ = (b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0) U(z).\end{aligned} \qquad (2.166)$$

Se defineste **functia de transfer a unui sistem discret în timp** ca fiind **raportul dintre transformata *Z* a marimii de iesire si transformata *Z* a marimii de intrare**, pentru conditii initiale nule ale sistemului

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}. \qquad (2.167)$$

Un sistem discret, **cu functia de transfer discreta**, ***H(z)*** se reprezinta prin **schema bloc** ca în fig. 2.35.

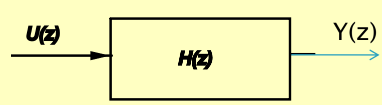

Fig. 2.35

Algebra functiilor de transfer discrete este identica cu cea a functiilor de transfer ale sistemelor in timp continuu.

Conexiunile de baza : serie, paralel si cu reactie inversa, sunt prezentate în fig. 2.36

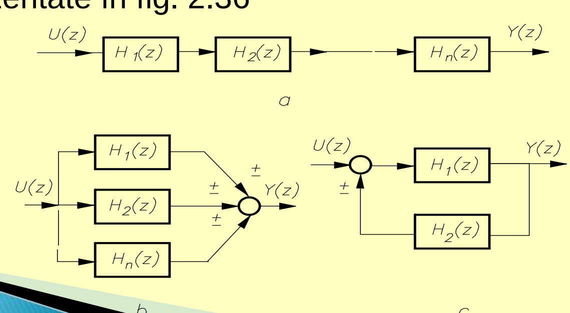

Fig. 2.36

- *Pentru n elemente discrete cu functiile de transfer $H_k(z),k=1,n$*, conectate în serie, fig. 2.36.*a*, respectiv conectate in paralel, fig. 2.36.b, functiile de transfer echivalente *H(z)* sunt

$$H(z)=\prod_{k=1}^{n} H_k(z); \quad H(z)=\sum_{k=1}^{n} H_k(z). \qquad (2.168); (2.169)$$

În cazul conexiunii cu reactie inversa, fig. 2.36.*c*, functia de transfer echivalenta se calculeaza cu relatia

$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1\pm H_1(z)H_2(z)} \qquad (2.170)$$

2.2.2.4 Functia de transfer a unui sistem cu esantionare

În sistemelor automate conduse cu calculator numeric pentru procese continue, **legatura dintre calculator si proces** se realizeaza prin intermediul unui convertor numeric-analogic (CNA) si respectiv a unui convertor analog-numeric (CAN), fig. 2.37.