- *Pentru n elemente discrete cu functiile de transfer $H_k(z),k=1,n$*, conectate în serie, fig. 2.36.*a*, respectiv conectate in paralel, fig. 2.36.b, functiile de transfer echivalente *H(z)* sunt

$$H(z)=\prod_{k=1}^{n} H_k(z); \quad H(z)=\sum_{k=1}^{n} H_k(z). \qquad (2.168);\ (2.169)$$

În cazul conexiunii cu reactie inversa, fig. 2.36.*c*, functia de transfer echivalenta se calculeaza cu relatia

$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1\pm H_1(z)H_2(z)} \qquad (2.170)$$

2.2.2.4 Functia de transfer a unui sistem cu esantionare

În sistemelor automate conduse cu calculator numeric pentru procese continue, **legatura dintre calculator si proces** se realizeaza prin intermediul unui convertor numeric-analogic (CNA) si respectiv a unui convertor analog-numeric (CAN), fig. 2.37.

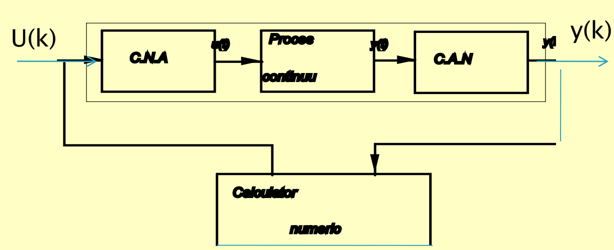

Fig. 2.37

Ansamblu proces continuu, convertor numeric-analogic (CNA), convertor analog-numeric (CAN) constituie un **proces continuu discretizat (numit si sistem cu esantionare)**, fig. 2.38, **marimile de intrare si de iesire fiind discrete.**

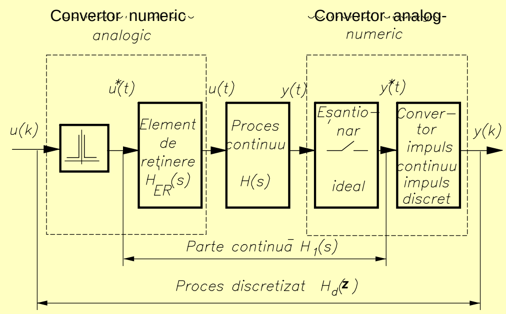

Fig. 2.38

în fig. 2.38 se pune în evidenta o **parte continua formata** din **elementul de retinere de ordin zero** cu **functia de transfer** $H_{ER}(s)$ si **procesul continuu** cu **functia de transfer** $H(s)$, având ca **intrare** un **tren de impulsuri** $u^*(t)$ si ca **marime de iesire** un alt tren de **impulsuri** $y^*(t)$. Se poate defini o **functie de transfer esantionata** a partii continue.

Elementul de retinere de ordin zero, fig. 2.39, transforma impulsul unitar continuu, $\delta(t)$, într-un impuls dreptunghiular unitar a carei expresie este

$$y_{ER}(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T) = h_{ER}(t) \qquad (2.171)$$

unde T este perioada de esantionare.

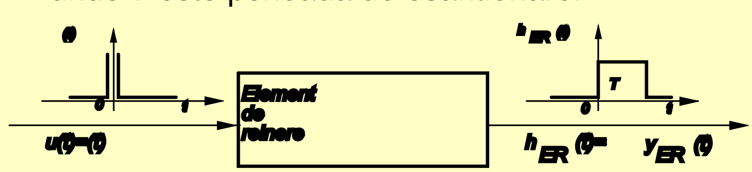

Fig. 2.39

Aplicând transformata Laplace în (2.171) se obtine

$$Y_{ER}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \qquad (2.172)$$

Functia de transfer a elementului de retinere se calculeaza cu relatia

$$H_{ER}(s)=\frac{L\{y_{ER}(t)\}}{L\{\delta(t)\}}=\frac{Y_{ER}(s)}{1}=\frac{1-e^{-sT}}{s}=L\{h_{ER}(t)\}. \qquad (2.173)$$

Ansamblul element de retinere de ordin zero si proces continuu este caracterizat de functia de transfer $H^*_1(s)$

$$H_1^*(s)=H_{ER}(s)H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}H(s). \qquad (2.174)$$

Functia de transfer discreta a acestui ansamblu se determina cu relatia

$$H_d(z)=Z\{H_1^*(s)\}=Z\left\{\frac{H(s)}{s}-\frac{H(s)}{s}e^{-sT}\right\}. \qquad (2.175)$$

H(s)/s este transformata Laplace a unei functii de timp a carei esantionare admite o transformata *Z*, notata *Z*{*H(s)/s*};

e^{-sT}*(H(s)/s)* reprezinta transformata Laplace a functiei de timp precedente întârziata cu un pas, ceea ce conduce în planul *z* la multiplicarea transformatei *Z* cu z^{-1}.

Se noteaza

$$H_2(s)=\frac{H(s)}{s}. \qquad (2.176)$$

si atunci

$$H_d(z)=Z\{H_2(s)\}-z^{-1}Z\{H_2(s)\}=(1-z^{-1})Z\{H_2(s)\}. \qquad (2.177)$$

Pentru a gasi simplu transformata $Z\{H_2(s)\}$ se apeleaza la trecerea prin functiile de timp dupa schema

$$H_2(s)\xrightarrow{L^{-1}}h_2(t)\rightarrow h_2(kT)\xrightarrow{Z}H_2(z). \qquad (2.178)$$

Exemplul 2.11. Se considera un sistem neted de ordinul unu, descris de functia de transfer $H(s) = k_p/(1 + sT_1)$ precedat de un element de retinere de ordin zero.

Functia de transfer discreta a acestui ansamblu, conform relatiei (2.177) se determina cu relatia

$$H_d(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{k_p}{s(1+sT_1)}\right\}. \qquad (2.179)$$

Se evalueaza $H_d(z)$ dupa schema (2.178). Se calculeaza functia original $h_2(t)$ si sirul $h_2(kT)$

$$h_2(t)=L^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{k_p}{s(1+sT_1)}\right\}=k_p(1-e^{-t/T_1}). \qquad (2.180)$$

$$h_2(kT)=k_p\left(1-e^{\frac{-kT}{T_1}}\right)=k_p\left(1-a^k\right);\; a=e^{\frac{-T}{T_1}}. \qquad (2.181)$$

Transformata Z a functiei $H_2(s)$ este

$$Z\{H_2(s)\}=Z\{h_2(kT)\}=k_p\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-a}\right] \qquad (2.182)$$

Tinând seama de (2.179) se obtine functia de transfer discreta cautata.

$$H_d(z)=(1-z^{-1})Z\{H_2(s)\}=k_p\frac{1-a}{z-a}. \qquad (2.183)$$

2.3. Raspunsurile temporale ale sistemelor dinamice liniare monovariabile invariante în timp

2.3.1. Calculul raspunsului unui sistem monovariabil prin rezolvarea ecuatiilor diferentiale sau cu diferente

Sistemele dinamice liniare monovariabile invariante în timp sunt descrise fie de o **ecuatie diferentiala**, în cazul **sistemelor continue în timp**, sau de o **ecuatie cu diferente** pentru **sisteme discrete in timp**

$$\begin{aligned} &y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y^{(1)}+a_0y=\\ &=b_mu^{(m)}b_{m-1}u^{(m-1)}+\ldots+b_1u^{(1)}+b_0u \end{aligned} \qquad (2.184)$$

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ = b_m u(k+m) + \ldots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \qquad (2.185)$$

Solutiile $y(t)$, respectiv $y(k)$ ale acestor ecuatii, pentru diferite semnale de intrare $u(t)$, respectiv $u(k)$ si diferite conditii initiale constituie raspunsurile acestor sisteme, fig. 2.40

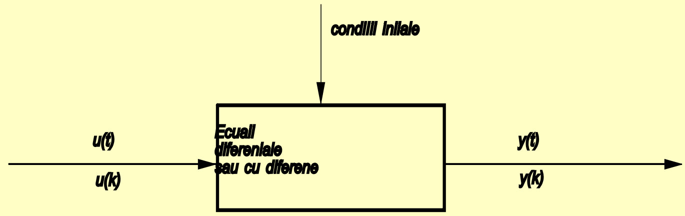

Fig. 2.40

Se considera impuse n conditii initiale la $t=0_+$ $y(0_+)$, $y^{(1)}(0_+)$, ..., $y^{(n-1)}(0_+)$.

Pentru ecuatia cu diferente (2.185),se impun n conditii initiale pentru functia [y] notate cu $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$.

În fig. 2.41 -*a,b* se prezinta cu linie continua marimile si valorile care sunt cunoscute si cu linie întrerupta marimile si valorile care se calculeaza. Marimile de intrare $u(t)$, respectiv $u(k)$ sunt impuse pentru $t > 0$, respectiv $k > 0$. Pentru determinarea solutiilor ecuatiilor trebuie cunoscute valorile initiale $u(0_-)$, $u^{(1)}(0_-)$, ..., $u^{(m-1)}(0_-)$ pentru cazul continuu, respectiv $u(-1)$, $u(-2)$, ..., $u(-n)$ pentru cazul discret. Aceste valori initiale pentru u sunt adesea nule: marimile de intrare sunt semnale cauzale

$$u(t) = 0 \;\; pentru \;\; t < 0 \, ; u(k) = 0 \;\; pentru \;\; k < 0 \, . \qquad (2.186)$$

Valorile $y(0_-)$, $y^{(1)}(0_-)$, ..., $y^{(n-1)}(0_-)$, respectiv $y(-1)$, $y(-2)$, ..., $y(-n)$ sunt cunoscute practic si ele rezulta din evolutia precedenta a sistemului.

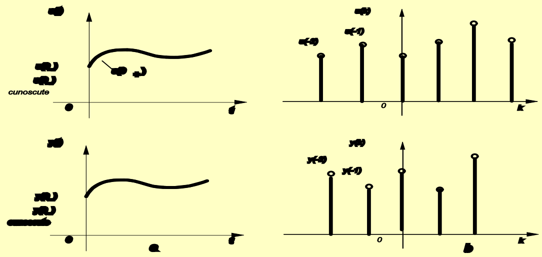

Fig. 2.41

2.3.2. Raspunsurile temporale ale sistemelor monovariabile netede; 2.3.2.1.Integrala de convolutie

Raspunsul unui sistem monovariabil neted este solutia *y(t)* a ecuatiei diferentiale ordinare cu coeficienti constanti (2.184) compusa din **componenta libera $y_l(t)$**, determinata ca solutie a ecuatiei omogene (corespunzatoare sistemului neexcitat *u = 0*) si **componenta fortata $y_f(t)$** determinata de tipul si amplitudinea intrarii *u(t)*

$$y(t) = y_1(t) + y_f(t). \qquad (2.187)$$

Ecuatia diferentiala omogena se obtine din (2.184) considerand membrul drept egal cu zero .

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0. \qquad (2.188)$$

Aceasta ecuatie admite un set fundamental de solutii de forma

$$y_i(t) = e^{p_i t}, \quad daca \ p_i \in \Re$$
$$y_i(t) = e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \ daca \ p_i \in C \qquad (2.189)$$
$$p_{i,i+1} = \alpha_i + j\beta_i \ ; \alpha, \beta \ \in \Re$$

unde p_i sunt radacinile ecuatiei caracteristice asociata ecuatiei diferentiale (2.188)

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (2.190)$$

În (2.189) s-au considerat doar radacinile p_i reale sau complex conjugate distincte.

Componenta libera ***$y_l(t)$*** este o **combinatie liniara** a **solutiilor fundamentale**

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t). \qquad (2.191)$$

Daca **marimea de intrare** a sistemului este **impulsul unitar (Dirac),** $u(t) = \delta(t)$, **raspunsul sistemului se numeste** ***functie pondere*** si **caracterizeaza comportarea libera a sistemului**. **Functia pondere**, notata cu ***h(t)*** are o expresie similara relatiei (2.191)

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t) \;\; pentru \;\; t \geq 0$$
$$h(t) = 0 \;\;\; pentru \;\; t < 0. \qquad (2.192)$$

Componenta fortata $y_f(t)$ a raspunsului sistemului se determina prin **metoda variatiei constantelor.**

$y_f(t)$ **se exprima cu ajutorul** ***produsului de convolutie real*** **pe un interval** de timp dat $[0_+, t]$ între **functia pondere *h(t)* si marimea de intrare *u(t)***

$$y(f) = \int_{0_+}^{t} h(\sigma)\, u(t-\sigma)\, d\sigma = \int_{0_+}^{t} h(t-\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma = (h \bullet u)(t). \qquad (2.193)$$

Solutia generala a ecuatiei diferentiale (2.184) se obtine înlocuind $y_l(t)$ din (2.191) si $y_f(t)$ din (2.193) în (2.187).

Constantele C_i se determina în functie de cele n conditii initiale ale functiei y si ale derivatelor acesteia

$$\begin{aligned} y(0_+) &= \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(0_+) + y_f(0_+) \\ &\vdots \\ y^{(1)}(0_+) &= \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(1)}(0_+) + y_f^{(1)}(0_+) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0_+) &= \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(0_+) + y_f^{(n-1)}(0_+). \end{aligned} \qquad (2.194)$$

Exemplul 2.12. Fie sistemul monovariabil definit de ecuatia

$$3\,y^{(2)} + y^{(1)} - 2y = u\,.$$

Sa se determine raspunsul sistemului pentru $u(t) = \delta(t)$ si conditiile initiale $y(0_+) = 0,\ y^{(1)}(0_+) = 1/3$.

Ecuatia caracteristica asociata ecuatiei diferentiale este $3p^2 + p - 2 = 0$ si are solutiile $p_1 = -1$; $p_2 = 2/3$.

Componenta libera se calculeaza cu relatia

$$y_1(t) = h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{\frac{2t}{3}}\,.$$

Componenta fortata este nula pentru ca $u(t) = 0$ pentru $t > 0$.

Solutia care verifica conditiile initiale este

$$y_1(t) = h(t) = -\frac{1}{5} e^{-t} + \frac{1}{5} e^{\frac{2t}{3}}\,.$$

2.3.2.2. Utilizarea transformatelor Laplace pentru calculul raspunsurilor temporale ale sistemelor netede

- Raspunsurile temporale ale sistemelor dinamice se pot calcula cu ajutorul transformatelor Laplace sau Z pentru orice functie de intrare care admite o transformata Laplace, respectiv, o transformata *Z*, daca functiile de transfer ale sistemelor sunt cunoscute.

$$\begin{aligned} &Y(s) = H(s)U(s) - \textit{pentru sisteme netede};\\ &Y(z) = H(z)U(z) - \textit{pentru sisteme discrete} \end{aligned} \qquad (2.195)$$

- Se considera un sistem monovariabil continuu în timp (neted) descris de ecuatia

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, u^{(j)}(t)\,;\ a_n = 1\\ &y^{(i)}(0)\,, i = \overline{0,(n-1)}\,;\ u^{(j)}(0_-)\,,\ j = \overline{0,(m-1)}\,, date\,. \end{aligned} \qquad (2.196)$$

2.3.2.2. Utilizarea transformatelor Laplace pentru calculul raspunsurilor temporale ale sistemelor netede

- Raspunsurile temporale ale sistemelor dinamice se pot calcula cu ajutorul transformatelor Laplace sau Z pentru orice functie de intrare care admite o transformata Laplace, respectiv, o transformata *Z*, daca functiile de transfer ale sistemelor sunt cunoscute.

$$\begin{aligned} &Y(s)=H(s)U(s)-\ pentru\ \ sisteme\ \ netede\ ; \\ &Y(z)=H(z)U(z)-\ pentru\ \ sisteme\ \ discrete \end{aligned} \qquad (2.195)$$

- Se considera un sistem monovariabil continuu în timp (neted) descris de ecuatia

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j\, u^{(j)}(t)\, ;\ a_n=1 \\ &y^{(i)}(0)\, ,i=\overline{0,(n-1)}\, ;\, u^{(j)}(0_-)\, ,\, j=\overline{0,(m-1)}\, ,date\, . \end{aligned} \qquad (2.196)$$

Se presupune ca se cunoaste *u(t)* pentru *t > 0*. Se aplica transformata Laplace în sens distributii stiind ca

$$L\{\ D\ f\ (t)\ \},= s\ \ L\{f\ (t)\ \}-\ f\ (0_-)=s\,F\,(s)-\ f\ (0_-). \qquad (2.197)$$

Din ecuatia (2.196) se obtine

$$\begin{aligned} &\left[s^n\, Y(s)-\left(s^{(n-1)}\, y(0_-)+\ldots+sy^{(n-2)}(0_-)+y^{(n-1)}(0_-)\right)\right]+\ldots+a_1\,[\ s\,Y(s)-y(0_-)]\ + \\ &+a_0 Y(s)=b_m\left[s^m U(s)-\left(s^{(m-1)}u(0_-)+\ldots+su^{(m-2)}(0_-)+u^{(m-1)}(0_-)\right)\right]+\ldots \\ &\ldots+b_1(s\,U(s)-u\,(0_-)+b_0\,U(s)\, . \end{aligned} \qquad (2.198)$$

Relatia (2.198) se poate aduce la forma

$$\begin{aligned} Y(s)=&\frac{b_m\, s^m+b_{m-1}\, s^{m-1}+\ldots+b_1\, s+b_0}{s^n+a_{n-1}\, s^{n-1}+\ldots+a_1\, s+a_0}\, U(s)\, + \\ &+\frac{F\ [s, y(0_-)\ldots y^{(n-1)}(0_-), u(0_-)\ldots u^{(m-1)}(0_-)}{s^n+a_{n-1}\, s^{n-1}+\ldots+a_1\, s+a_0}\, . \end{aligned} \qquad (2.199)$$

$$Y(s) = H(s)U(s) + \sum_{i=0}^{n-1} [\, H_{ai}(s)\, y^{(i)}(0_-) - H_{bi}(s) u^{(i)}(0_-)] =$$
$$= H(s)U(s) + H_0(s)$$

(2.208)

$$H_{ai}(s) = \frac{Q_{ai}(s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)} \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} s^{j-i} \quad , i = \overline{0,(n-1)}$$
$$H_{bi}(s) = \frac{Q_{bi}(s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)} \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} s^{j-i} \quad , i = \overline{0,(n-1)}$$

(2.209)

Ecuatia (2.208) se poate reprezenta grafic prin schema bloc din fig. 2.42.

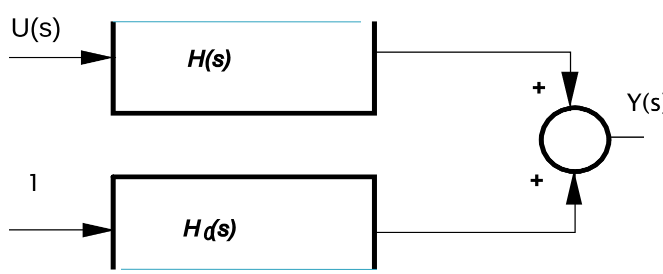

Fig. 2.42

Aplicând transformata Laplace inversa în (2.208) se obtine

$$y(t) = \int_0^t (h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma + h_0(t)\,; t \ge 0 \qquad (2.210)$$

$$h_0(t) = L^{-1}\{\, H_0(s)\} = \sum_{i=1}^{n-1} [\, h_{ai}(t)\, y^{(i)}(0_-) - h_{bi}(t) u^{(i)}(0_-)] \,.$$

Rezulta ca marimea de iesire a sistemului este formata din doua componente: integrala de convolutie pune în evidenta actiunea marimii de intrare pentru $t \geq 0$, iar $h_0(t)$ pune în evidenta influenta preistoriei (a conditiilor initiale nenule la $t = 0_-$) asupra comportarii sistemului pentru $t \geq 0$.

Evolutia marimii de iesire din momentul $t = 0$ cere cunoasterea valorilor marimilor $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ la momentul $t = 0_+$ numite conditii initiale conventionale. Aceste valori la $t = 0_+$ nu coincid, în general, (datorita aplicarii unei noi cauze) cu valorile initiale la $t = 0_-$, care se cunosc din evolutia anterioara a sistemului.

Teorema valorii initiale a transformatei Laplace permite determinarea conditiilor initiale conventionale la $t = 0_+$ a marimii de iesire $y(t)$ si ale derivatelor sale, fara ca $y(t)$ sa fie cunoscut.

Pentru sistemele care pleaca din repaus, conditiile initiale $y(0_-), \ldots, y^{(n-1)}(0_-), u(0_-), \ldots, u^{(m-1)}(0_-)$ sunt nule si în relatia (2.199) al doilea termen din membrul drept se anuleaza. Primul termen reprezinta produsul dintre functia de transfer $H(s)$ si imaginea marimii de intrare $U(s)$. Relatia (2.199) se reduce la

$$Y(s) = H(s)U(s). \qquad (2.200)$$

Aplicând transformata Laplace inversa în (2.200) se obtine ***y(t)*, solutie a ecuatiei diferentiale** (2.196).

$$y(t) = L^{-1}\{H(s)U(s)\} = \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma. \qquad (2.201)$$

Exemplul 2.13. Sa se determine marimea de iesire $y(t)$ a sistemului dinamic neted descris de ecuatia

$$y^{(2)} + 3y^{(1)} + 2y = u - u^{(1)};\ y(0_-) = y(0);\ y^{(1)}(0_-) = 0. \qquad (2.202)$$

Se considera

$$u(t)=\begin{cases} 2 & t<0 \\ 4\sigma(t) & t\geq 0\,. \end{cases} \qquad (2.203)$$

Se aplica transformata Laplace în sens distributii. Se obtine

$$L\{y(t)\} = Y(s)\,;\, L\{Dy(t)\} = sY(s) - y_0$$
$$L\{D^2 y(t)\} = s^2 Y(s) - sy_0\,;\, L\{u(t)\} = U(s) \qquad (2.204)$$
$$L\{Du(t)\} = sU(s) - 2\,; U(s) = 4/s\,.$$

Cu aceste expresii, transformata Laplace a ecuatiei (2.202) se aduce la forma

$$Y(s) = \frac{1-s}{s^2-3s+2}\,\frac{4}{s} + \frac{(s+3)\,y_0}{s^2+3s+2} + \frac{2}{s^2+3s+2}\,. \qquad (2.205)$$

Aplicând tranformata Laplace inversa în (2.204) (dupa descompunerea în fractii simple) se obtine

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 2\sigma(t) + (2y_0-6)e^{-t} + (4-y_0)e^{-2t}$$
$$\lim_{t\to 0_+} y(t) = y(0_+) = y_0\,;\, \lim_{t\to 0_+} y^{(1)}(t) = -2\,. \qquad (2.205)$$

Transformata Laplace în sens distributii evita determinarea în prealabil a valorilor lui *y* si a derivatelor sale în $t = 0_+$; ea ne furnizeaza un mijloc de a le gasi - teorema valorii initiale.

2.3.2.3. Determinarea conditiilor initiale conventionale pentru sistemele monovariabile netede

Urmarind evolutia unui sistem în timp intereseaza deseori comportarea lui de la un anumit moment (conventional ales $t = 0$).

Aplicând transformata Laplace în sens distributii ecuatiei diferentiale (2.196) a unui sistem monovariabil, considerând ca *m*= *n*, tinând seama si de (2.198) se obtine urmatoarea relatie a transferului intrare-iesire

$$Y(s)= H(s)U(s)+\frac{s^{n-1}}{P(s)}[y(0_-)-b_n u(0_-)]+\frac{s^{n-2}}{P(s)}[y^{(1)}(0_-)+a_{n-1}y(0_-)-$$

$$-b_n u^{(1)}(0_-)-b_{n-1}u(0_-)]+\ldots+\frac{1}{P(s)}[y^{(n-1)}(0_-)+\ldots+a_1 y(0_-)-$$

$$-(b_n u^{(n-1)}(0_-)+\ldots+b_1 u(0_-))] \qquad (2.207)$$

$$H(s)=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0};$$

$$P(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0$$

în care *H(s)* este functia de transfer a sistemului; *P(s)* este polinomul caracteristic.

Relatia (2.207) se poate prelucra astfel

Aplicând teorema valorii initiale în (2.212), presupunând ca *u(t)* este discontinua în origine ($U(s) = u(0_+)/s$), se obtine

$$y(0_+)=\lim_{s\to\infty} sY(s)=b_n u(0_+)+y(0_-)-b_n u(0_-)$$

sau sub alta forma $$\Delta y_0=b_n\Delta u_0 \qquad (2.213)$$

unde $\Delta y_0 = y(0_+) - y(0_-)$; $\Delta u_0 = u(0_+) - u(0_-)$.

Pentru derivata întâi rezulta

$$\Delta y_0^{(1)}+a_{n-1}\Delta y_0=b_n\Delta u_0^{(1)}+b_{n-1}\Delta u_0$$

în care $\Delta y^{(1)}_0 = y^{(1)}(0_+) - y^{(1)}(0_-)$; $\Delta u^{(1)}_0 = u^{(1)}(0_+) - u^{(1)}(0_-)$

Se continua în acest fel si pentru celelalte derivate si se obtine un sistem de *n* ecuatii algebrice cu *n* necunoscute

$$\Delta y_0 = b_n \Delta u_0$$
$$a_{n-1}\Delta y_0 + \Delta y_0^{(1)} = b_{n-1}\Delta u_0 + b_n \Delta u_0^{(1)}$$
$$a_{n-2}\Delta y_0 + a_{n-1}\Delta y_0^{(1)} + \Delta y_0^{(2)} = b_{n-2}\Delta u_0 + b_{n-1}\Delta u_0^{(1)} + b_n \Delta u_0^{(2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1\Delta y_0 + a_2\Delta y_0^{(1)} + \ldots + \Delta y_0^{(n-1)} = b_1\Delta u_0 + b_2\Delta u_0^{(1)} + \ldots + b_n \Delta u_0^{(n-1)}$$

în care

$$\Delta y_0^{(k)} = y^{(k)}(0_+) - y^{(k)}(0_-) \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$
$$\Delta u_0^{(k)} = u^{(k)}(0_+) - u^{(k)}(0_-) \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

(2.216)

$\Delta y_0^{(k)}$ sunt necunoscute, iar $\Delta u_0^{(k)}$ sunt cunoscute.

Sistemul de ecuatii (2.215) se poate scrie matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_0^{(1)} \\ \Delta y_0^{(2)} \\ \cdots \\ \Delta y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_0^{(1)} \\ \Delta u_0^{(2)} \\ \cdots \\ \Delta u_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.217)$$

Sistemul (2.217) are solutia

$$\begin{bmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_0^{(1)} \\ \Delta y_0^{(2)} \\ \cdots \\ \Delta y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_0^{(1)} \\ \Delta u_0^{(2)} \\ \cdots \\ \Delta u_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.218)$$

Cunoscând $y^{(k)}(0_-)$, $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$, din evoluta anterioara a sistemului si $\Delta y^{(k)}{}_0$, solutia determinata din (2.218), se pot afla valorile initiale conventionale $y^{(k)}(0_+)$

2.3.2.4. Raspunsul la impuls al sistemelor monovariabile netede. Proprietati

Se considera ca marimea de intrare a unui sistem monovariabil continuu este distributia Dirac, u(t)= $\delta(t)$, cu imaginea

$$U(s) = L\{\,\delta(t)\,\} = 1\,. \qquad (2.221)$$

Din ecuatia de transfer intrare-iesire pentru transformata Laplace a marimii de iesire se obtine

$$Y(s) = H(s)U(s) = H(s) \bullet 1 = H(s) \qquad (2.222)$$