

Facultatea de Inginerie electrica,energetica si informatica aplicata

Identificarea si modelarea sistemelor

Curs An III , Inginerie electrica, EPAE
Sem. II

Gh. Livint

Capitolul I Probleme generale ale modelarii si identificarii sistemelor

1. Introducere în modelarea sistemelor

Un **sistem** este o grupare de elemente pasive și active organizate astfel ca, la o comandă, **să execute o funcție determinată**

Un sistem constituie o **unitate relativ delimitată** față de mediul înconjurător printr-o **anumită structură internă**.

Principalele **caracterizări ale noțiunii de sistem** sunt:

. **părțile componente ale unui sistem** se află într-o **anumită relație**, pe baza căreia se delimitează sistemul față de mediul înconjurător;

- **elementele sistemului au funcții precise** și ocupă în cadrul sistemului **poziții bine determinate**; sistemul are deci o **anumită structură**;
- între mărimile fizice ale sistemului există **legături de cauzalitate**. **Mărimile cauze** se numesc **mărimi de intrare**, iar **mărimile efect** se numesc **mărimi de ieșire**;
- legăturile de cauzalitate pot fi astfel ordonate încât în cadrul sistemului să **existe legături inverse (reacții) pozitive** sau **negative**;
- **acțiunea comună** a părților sistemului asigură **realizarea unui anumit scop**;

O parte a unui sistem se numește **subsistem**. Noțiunile de **sistem** și **subsistem** sunt relative.

Între părțile unui sistem există legături prin care se transmit **informații**.

Gh. Livint

Mărimile fizice care transmit informații se numesc **semnale**. **Caracteristica fizică care se modifică** în dependență de informație se **numește parametru informațional**

Semnalele sunt mărimi fizice existente la intrarea, ieșirea sau în interiorul sistemelor, care depind de parametrul informațional și de timp.

Analiza și modelarea sistemelor prezintă un interes crescut în domenii foarte diverse: conducerea proceselor, economie, biologie, medicina, ecologie

Analiza unui sistem poate fi realizată cu ajutorul modelelor deduse și verificate prin încercări experimentale succesive.

Un model al unui sistem este definit de **orice relație de legătură dintre semnalele observate** (de intrare și de ieșire) ale acestuia

Modelul unui sistem constituie o reprezentare a aspectelor **esențiale** ale acestuia, care **prezintă cunoștințele despre sistem într-o formă utilizabilă**, adecvata scopului pentru care este necesar modelul .

Modelele pot fi de forme diferite și pot fi exprimate prin **formalisme matematice de grade diferite**

Se deosebesc următoarele categorii de modele :

- 1. modele mintale;**
- 2. modele grafice;**
- 3. modele matematice sau analitice;**
- 4. modele software.**

1. Modelele mintale nu implică nici un **formalism matematic**.

De exemplu conducerea unui automobil presupune cunoașterea faptului că rotirea volanului spre stânga sau dreapta determină dirijarea automobilului spre stânga sau dreapta.

2. Modelele grafice descriu **proprietățile sistemelor** prin utilizarea **tabelelor numerice și/sau a curbelor**.

Sistemele liniare pot fi **descrise** univoc prin **răspunsurile la impuls** sau **răspunsurile indiciale** sau prin **caracteristicile de frecvență**

3. Modelele matematice sau analitice ale sistemelor sunt reprezentate de **relațiile de legătură dintre variabilele (semnalele) sistemului** exprimate prin **structuri matematice** de tipul **ecuațiilor algebrice, ecuațiilor diferențiale sau cu diferențe**.

4. Modelele software sunt programe utilizate pentru **simularea pe calculator** a unor sisteme. Pentru sisteme complexe aceste **programe** pot să fie realizate prin **interconectarea mai multor subrutine și nu pot fi exprimate analitic** ca modelele matematice.

Nu este necesar ca modelul sa descrie amanuntit mecanismul real al sistemului. Modelul trebuie sa ofere o baza pentru decizii, sa fie o reprezentare cu complexitate redusa a realitatii.

Din acest punct de vedere modelele se pot clasifica in doua categorii principale:

1. **modele materiale (sau fizice).**
2. **modele abstracte (sau formale).**

1. Modelele fizice, atunci când pot fi construite, reprezinta **replici**, de obicei **la scara redusa**, ale **sistemelor originale**. Ele sunt utilizate in multe domenii ale tehnicii: constructii, navigatie, hidrotehnica etc, unde incercarile experimentale pe sistemele reale sunt costisitoare.

Trebuie cunoscute relatiile de similitudine intre sistemul original si replica sa la scara redusa.

2. Modelele abstracte sunt reprezentate de modelele matematice de forma ecuatiilor algebrice, ecuatiilor diferentiale sau sistemelor de ecuatii diferentiale sau cu diferente.

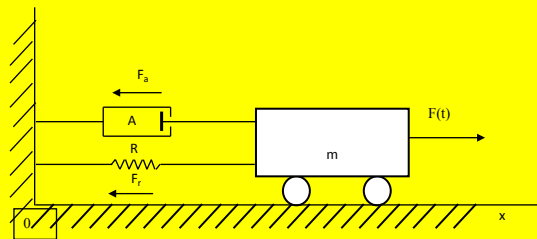


Fig.1

De exemplu, relatia dintre variabilele de intrare si iesire ale unui sistem mecanic, prezentat în fig. 1.1, este o ecuatie diferentială liniara de ordinul doi cu coeficienti constanti, care se obține aplicând legea a doua a dinamicii și înlocuind succesiv toate mărimile intermediare : forțele F_a , F_r , deplasarea $x(t)$:

$$\begin{aligned}
F(t) - F_r - F_a &= m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}; \quad x(t) = y(t); \\
F_r &= k_r x(t); \quad F_a = k_a \frac{dx(t)}{dt}; \quad F(t) = u(t); \\
my^{(2)} + k_a y^{(1)} + k_r y &= u(t); \quad y^{(2)} + \frac{k_a}{m} y^{(1)} + \frac{k_r}{m} y = \frac{1}{m} u(t); \\
y^{(2)} + 2\xi\omega_n y^{(1)} + \omega_n^2 y &= k_p \omega_n^2 u(t); \quad k_p = 1/k_r; \\
\omega_n &= \sqrt{\frac{k_r}{m}}; \quad \xi = \frac{k_a}{2\sqrt{k_r m}};
\end{aligned} \tag{1.1}$$

unde : $y(t)$ este mărimea de ieșire, $u(t)$ este mărimea de intrare, $x(t)$ este deplasarea sistemului după axa Ox , ω_n – este pulsația naturală, ξ este factorul de amortizare, k_p este factorul de amplificare.

Pentru sisteme complexe de tipul laminoarelor, coloanelor de distilare a titeiului, masinilor de fabricat hârtie, dependentele dintre variabilele de intrare și de ieșire pot fi modelate printr-un număr mare de relații matematice de tipul ecuațiilor diferențiale liniare și neliniare, ecuații cu derivate parțiale.

Modelul matematic al unui sistem trebuie să includă atât comportarea sa în regimurile staționare cât și în regimurile tranzitorii (dinamice).

Pentru un circuit electric RLC serie modelul este o ecuație diferențială de forma

$$LCy^{(2)} + RCy^{(1)} + y(t) = u(t); \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}; \tag{1.2}$$

Două sisteme sunt analoage dacă modelele lor matematice sunt identice ca formă.

Pentru sistemul mecanic din *fig. 1.1* și un circuit electric *RLC* serie, ambele descrise de câte o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, există următoarele corespondențe între variabile, prezentate în *tabelul 1.1*

Tabelul 1.1

sistem mecanic	sistem electric
forță F	tensiune u
deplasare x	sarcină q
masă m	inductanță L
frecare k_a	rezistență R
rigiditate k_r	capacitate C
$\xi = \frac{k_a}{2\sqrt{mk_r}}; \omega_n = \sqrt{\frac{k_r}{m}};$	$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}; \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}};$

Modelele matematice se clasifică după aceleași criterii ca și sistemele pe care le descriu

1.2. Modelarea teoretică și identificarea sistemelor

1.2.1. Modelarea teoretică

În principiu un model al unui sistem se obține din datele observate.

Modelul mintal al dinamicii volan-automobil este dezvoltat prin experiența conducerii.

Modelele grafice sunt obținute pe baza anumitor măsurători.

Modelele matematice ale sistemelor se obțin prin utilizarea unei combinații adecvate de procedee teoretice și experimentale a căror succesiune depinde de obiectivul modelării și de caracteristicile sistemelor.

În cazul modelării teoretice, **pe baza ecuațiilor de bilanț** (de masă, de energie, de cantitate de mișcare), a legilor fizice care descriu fenomenele care intervin în sistemele reale se determină **modelele matematice teoretice ale sistemelor**.

Ecuatiile de bilant se scriu **pentru intreg sistemul** (sau pentru subsistemele componente) in cazul **sistemelor** cu **parametri concentrati**, sau pentru un **element infinitesimal** pentru sistemele cu parametri distribuiti. Fenomenele de acumulare (de consum) din sistem sunt descrise de ecuatii diferentiale ce **constituie ecuatiile de stare ale sistemului**

Simplificarea modelelor teoretice se obtine prin:

- a) liniarizarea ecuatiilor neliniare (cu derivate partiale), atunci când functionarea sistemului are loc in jurul unui punct static de functionare dat .
- b) aproximarea ecuatiilor cu derivate partiale prin ecuatii diferentiale liniare;
- c) reducerea ordinului ecuatiilor diferentiale ordinare.

Modelele teoretice se pot obtine atât pentru **sisteme existente fizic** (realizate) cât si pentru **sisteme in stadiu de proiect de executie**.

Aceste modele au un domeniu mare de validitate iar parametrii acestora au semnificatii fizice directe.

1.2.2. Identificarea sistemelor

Identificarea sistemelor sau **analiza experimentală** este **operația de determinare a modelelor matematice** ale acestora **pe baza masuratorilor efectuate** asupra marimilor care caracterizeaza functionarea sistemelor in anumite regimuri

Pe baza **cunostintelor apriori** despre un sistem (obtinute din modelarea teoretica sau din masuratori anterioare) si a **masuratorilor marimilor de intrare si de iesire** din sistem, printr-o **metoda de identificare** se stabileste legatura dintre variabilele masurate, deci **modelul experimental** al sistemului.

Modelul experimental contine ca **parametri, valori numerice a caror legatura functionala** cu datele fizice, ramâne necunoscuta; acest **model descrie comportarea momentana dinamica a sistemului** si poate fi utilizata in scopuri de **conducere sau predictie a unor variabile**.

Modelarea teoretica utilizeaza rezultatele identificării pentru a **verifica exactitatea modelului teoretic**, datorita dificultatilor de apreciere a valorilor unor constante fizico - chimice si/sau constructive ale sistemului respectiv.

De asemenea **identificarea poate utiliza rezultatele modelării teoretice** care **furnizează informații asupra structurii modelului sau structurii posibile a acestuia**.

Prin **compararea modelelor teoretice si experimentale** se **pot elimina unele neconcordanțe** dintre acestea, prin refacerea unor etape din cadrul modelării teoretice sau a identificării.

Pretentiile asupra modelului sunt diferite in functie de scop.

Scopul identificării poate fi determinarea unor caracteristici dinamice pentru **acordarea unui regulator PID, proiectarea analitica a unui regulator stabil**, proiectarea unei strategii optime de tranzitie intre doua stari ale procesului sau **proiectarea unui regulator optimal stocastic** care sa minimizeze variatiile iesirii datorate zgomotelor.

Verificarea adecvantei modelului, consta in compararea unui set de performante ale modelului cu performantele prestabilite in conformitate cu un anumit criteriu.

1.3. Proceduri de identificare a sistemelor

Principalele etape ale procesului de identificare a sistemelor sunt reprezentate în fig. 1.2 : **1) informații apriorice ; 2) pregătire identificare ; 3) estimare structură, parametri ; 4) validare model.**

1. Informațiile apriorice sunt de o importanță deosebită în identificare. **Cunostintele dobândite de experimentator prin înțelegerea fizică a procesului** examinat **pot conduce la o anumită structură a modelului**, uneori pot conține chiar informații asupra valorilor aproximative ale unor parametri **ceea ce simplifică algoritmul de identificare.**

Pe **baza informațiilor apriorice** : - se poate proiecta experimentul de identificare; se poate cunoaște măsura în care variabilele de intrare influențează ieșirile; dacă este posibilă aplicarea unui semnal de probă și ce caracteristici trebuie să aibă acesta ; dacă este necesară observarea în funcționarea normală, în buclă deschisă sau închisă , care este perioada de esanționare cea mai potrivită pentru achiziția și prelucrarea datelor, etc.

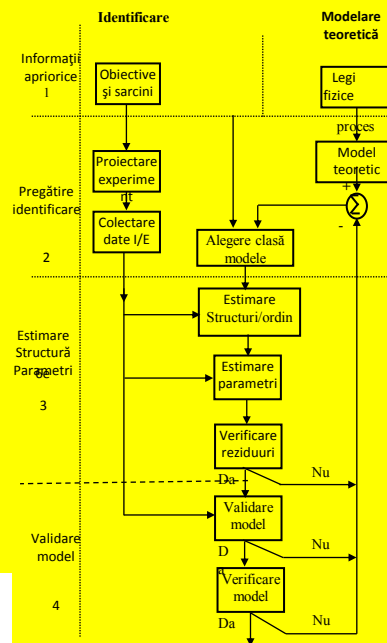


Fig. 1.2

Abordarea **procesului ca o "cutie neagra"** nu este realista în majoritatea situatiilor tehnice. În general, informatiile apriorice, completate cu cele dobândite pe baza unor experimente, permit adoptarea unei anumite structuri pentru model...

2. În functie de **obiectivele identificarii** in etapa a doua **se alege un set de modele adecvate** pentru tipul de aplicatie preconizat, se stabileste care sunt **semnalele de proba** care pot fi aplicate sistemului astfel ca estimatiile parametrilor sistemului sa fie cât mai precise. Se **genereaza semnalele de test** si se **achizitioneaza datele masurate**, se corecteaza aceste date.

3. Dispunând de **datele masurate si de setul de modele** fixat, in etapa a treia se trece la **determinarea structurii (ordinul modelului)** si a **parametrilor** acestuia

utilizând tehnici de estimare de tipul **metodelor celor mai mici patrate, metoda variabilelor instrumentale**, etc.

4. În etapa a patra se urmareste **validarea modelului** verificând **daca toate informatiile posibile din datele de intrare - iesire** ale sistemului **se regasesc in model**; se verifica convergenta modelului cu informatiile disponibile.

Procedeele de identificare se pot fi imparti in grupele :

a) **analiza Fourier**, b) **analiza de corelatie**, c) **analiza spectrala**, d) **procedee ce utilizeaza modele ajustabile**, e) **estimare de parametri**.

a) **Analiza Fourier** se utilizeaza pentru **determinarea caracteristicilor de frecventa** ale **sistemelor liniare continue** cu **valoare relativ mare** a raportului semnal / zgomot.

b) **Analiza de corelatie** se utilizeaza pentru **determinarea functiilor de corelatie** (din care se obtin functiile pondere) ale sistemelor continue sau discrete cu marimi de intrare semnale stocastice. Se aplica la sisteme la care **raportul semnal/zgomot este de valoare mica**.

c) **Analiza spectrala** se aplica in aceleasi conditii in care se utilizeaza si analiza de corelatie si **permite determinarea functiilor de densitate spectrala de putere** din care se obtin **caracteristicile de frecventa atenuare - pulsatie, faza - pulsatie**

Analiza Fourier, analiza de corelatie si analiza spectrala furnizeaza **modele neparametrice**, reprezentate prin **familii de curbe : răspunsuri temporale (la impuls, indicial), caracteristici de frecvență**.

Nu se impune structura modelului,

Se aplica pentru identificarea sistemelor cu structuri oricat de complicate.

Procedeele de identificare d) si e) furnizeaza **modele parametrice**, ceea ce impune **alegerea a priori a structurii** modelului. **Modelele parametrice** sunt reprezentate de **ecuațiile diferențiale sau cu diferențe, funcțiile de transfer, ecuațiile intrare-stare-ieșire**.

Parametrii modelului se obtin din **conditia minimizarii unei functionale a erorii** dintre model si sistem.

Se pot utiliza urmatoarele erori dintre modelul M si sistemul S , fig.1.3:

a). **eroarea de ieșire**, fig.1.3.a, $\varepsilon(t) = y(t) - Mu(t)$

b). **eroarea de intrare**, fig.1.3.b, $\varepsilon(t) = u(t) - M^{-1}y(t)$

c). **eroarea generalizată**, fig. 1.3.c, $\varepsilon(t) = M_2^{-1}y(t) - M_1u(t)$

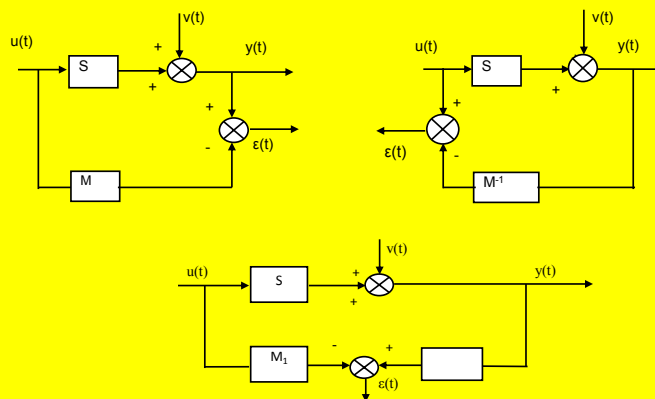


Fig. 1.3

Pentru a obtine erori care depind liniar de parametrii modelului se utilizeaza: **eroarea de iesire** pentru modele de tip **functie pondere** si **eroare generalizata** pentru modele descrise prin **ecuatii diferentiale, ecuatii cu diferente sau functii de transfer**.

Procedeele de identificare care utilizeaza **modele ajustabile** s-au dezvoltat in special pentru **estimarea parametrilor modelelor sistemelor continue**; ele se utilizeaza in cadrul **sistemelor de conducere adaptiva**.

Procedeele de estimare ale parametrilor furnizeaza estimatii ale parametrilor modelului unui **sistem** a carui **structura este cunoscuta**.

Semnalele de intrare conditioneaza in mod esential rezultatele oricarui experiment de identificare, proiectarea si analiza lor dezvoltându-se in paralel cu studiul algoritmilor de identificare.

Primele proceduri de identificare se bazuau pe o aparatura de calcul modesta. Prin aplicarea **unor semnale de intrare speciale se obtin informatii despre proces**, direct utilizabile. Se determina exclusiv unele **modele neparametrice**.

Dezvoltarea tehnicii de calcul a facut posibila aplicarea unor metode de identificare care **nu impun un semnal de intrare special**; semnalul de intrare trebuie sa satisfaca o **conditie de persistenta**, notiune care exprima capacitatea unui semnal de a pune in evidenta caracteristicile dinamice ale procesului. În acest caz prelucrarea datelor experimentale se realizeaza cu **algoritmi relativ complicati**, dar care ofera avantaje considerabile.

În fig. 1.4 se prezintă principiul estimării parametrilor modelelor discrete.

Pe calculator este implementat un model discret adaptiv (cu parametri ajustabili). Eroarea dintre ieșirea sistemului la momentul k , $y(k)$ și ieșirea predictată de model $\hat{y}(k)$

numită **eroare de predicție**, este utilizată de **algoritmul de adaptare parametrică**. Acest algoritm va determina modificarea parametrilor modelului la fiecare moment de eșantionare,

astfel încât să se minimizeze această eroare.

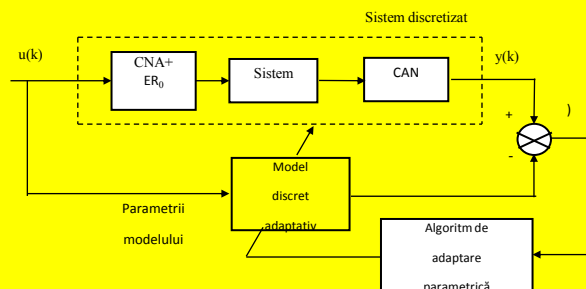


Fig. 1.4

2. MODELAREA SISTEMELOR ȘI SEMNALELOR

2.1. Clase de modele utilizate în identificarea sistemelor

În identificarea sistemelor se utilizează diferite clase de modele în funcție de informația apriorică și de scopul final urmărit. Clasificarea modelelor se poate face după aceleași criterii ca și sistemele pe care le caracterizează. Se deosebesc diferite categorii de modele.

1. Modele liniare și neliniare

Modelele liniare și neliniare se deosebesc în principal după aplicarea principiului suprapunerii efectelor, care este posibilă numai pentru sistemele liniare. **Liniaritatea se referă la dependența dintre variabilele sistemului.** Pentru estimarea parametrilor un concept important este cel de **liniaritate (neliniaritate) în parametri**, în raport cu relația dintre variabilele dependente și parametri.

Un sistem poate fi neliniar din punct de vedere dinamic și totuși liniar (sau liniarizabil) în parametri

Exemplul 2.1: Fie $y(t)$ și $u(t)$ marimile de ieșire/întare ale sistemului prezentat în fig. 2.1. Modelul sistemului este dat de relația de legătură dintre aceste marimi.

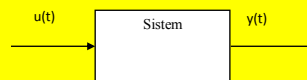


Fig. 2.1

Se consideră

$$y(t) = C[u(t)]^\alpha \quad (2.1)$$

Acest model este neliniar dar liniarizabil în parametrii C și α prin transformarea

$$z(t) = \ln y(t); x(t) = \ln u(t) \quad (2.2)$$

care conduce la modelul liniar

$$z(t) = a + bx(t); \quad a = \ln C; \quad b = \alpha \quad (2.3)$$

2. Modele neparametrice si parametrice

În alegerea clasei de modele se folosesc doua abordari. Primul mod de abordare foloseste **ideea transformarii definite pe un spatiu al functiilor** care ofera o reprezentare a semnalelor de intrare si iesire din sistem. În acest caz modelul sistemului consta din transformarea de la spatiul functiilor de intrare la spatiul functiilor de iesire. Pentru că nu se folosesc informatii despre structura fizica a sistemului se obțin **modele neparametrice** (raspunsuri la impuls, caracteristici de frecventa, serii Voltera etc.)

Al doilea mod de abordare porneste de la o **descriere matematica a dinamicii sistemului in spatiul parametrilor**.

Coordonatele acestui spatiu sunt valorile numerice ale parametrilor modelului, considerate ca iesiri ale acestuia.

Daca **modelul** este de exemplu **ecuatia diferentiala liniară**, **coordonatele spatiului** parametrilor pot fi **coeficientii ecuatiei si valorile conditiilor initiale**.

Modelele din aceasta categorie se numesc **modele parametrice** (ecuatii diferentiale de forma si de ordin determinat, functii de transfer, modele de stare etc.)

3. Modele intrare - iesire si modele intrare - stare - iesire

Descrierea matematica a unui sistem utilizeaza marimile de intrare $u(t)$, de iesire $y(t)$ si de stare $x(t)$, fig. 2.2.

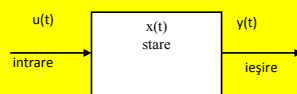


Fig. 2.2

Marimea de intrare (marimea cauza) $u(t)$ se aplica sistemului de la un moment initial τ pe o durata de timp finita numita **interval de observare**. **Marimea de iesire** (marimea efect) $y(t)$ depinde de marimea de intrare $u(t)$ si de starea initiala $x(\tau)$. Modelul matematic al unui sistem real se poate exprima prin doua seturi de ecuatii

1. ecuatiiile intrare-stare care exprima **dependenta marimilor de stare ale sistemului de marimile sale de intrare**.

2. ecuatiiile de iesire care exprima **dependenta dintre marimile de iesire si cele de stare**, adică :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(t, x(t), u(t))\end{aligned}\quad (2.4)$$

cu $x(\tau)$ dat, in care f, g, x, u sunt marimi vectoriale de dimensiuni adecvate.

Aceasta descriere constituie reprezentarea intrarea-stare-iesire a sistemului (**model de stare**). Solutia ecuatiei de stare este de forma

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u(t)), \quad t \geq \tau \quad (2.5)$$

unde : $u(t)$ este definita pe intervalul $[\tau, t]$; φ este **functia de tranzitie a starilor**

Eliminând starea $x(t)$ din cele doua relatii (2.4) rezulta

$$y(t) = g(t, \varphi(t, \tau, x(\tau), u(t)), u(t)); \quad t \geq \tau \quad (2.6)$$

care constituie reprezentarea intrare-iesire (model intrare-iesire) a sistemului.

Modelele intrare-stare-iesire prezintă facilitati deosebite in analiza si sinteza sistemelor automate in domeniul timpului, prin implementarea ușoară pe calculator a unor metode specifice.